Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Seminario de Combinatoria

Tarea 4

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

NOTACIÓN: $S(n,k) := \left\{ {n \atop k} \right\}$

Lema. - Sea $n > 0$ y $k \leq n+1$, entonces

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}$$

Demostración: Tenemos que el numero de particiones de tamaño k de un conjunto de tamaño $n+1$ es

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\}$$

veamos otra forma de contar esto. El numero de particiones de tamaño k será el total de particiones de tamaño k que tengan al conjunto $\{n+1\}$ como elemento de la partición más aquellas particiones de tamaño k que no lo tengan.

Para lo primero, como $\{n+1\}$ ya es parte de la partición solo necesito seleccionar $k-1$ particiones más del conjunto de "n" elementos que me queda, (pues al ser un singulete el elemento "*n+1*" ya no estará en ninguna de las particiones que tome), siendo en total

$$\left\{ {n \atop k-1} \right\}$$

y en el otro caso primero selecciono k subconjunto del conjunto de n elementos (no considero al último y de esta manera no estará su singulete en la particion) siendo

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

y luego pongo el elemento "$n+1$" en alguno del os elementos de la partición, que, al ser k tendré en total

$$k\left\{ {n \atop k} \right\}$$

formas hacerlo, por lo tanto, se tiene el resultado.

■

Problema 1. – *Calcula el número de Bell para* $n = 5,\ B_5$

Solución: Por el lema anterior tenemos que se el número de Stirling de tipo II cumple una relación tipo pascal, donde cada valor consecutivo de los números de Stirling los puedo calcular mediante un triangulo

$$\begin{array}{ccccc} & & S(1,1) & & \\ & S(2,1) & & S(2,2) & \\ S(3,1) & & S(3,2) & & S(3,3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

de donde, por ejemplo, $S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2(1) = 3$, por lo que sabiendo que $S(1,1) = S(2,1) = S(2,2) = 1$ podemos rellenar el triángulo fácilmente solo haciendo cuentas, teniendo pues

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 \end{array}$$

de donde obtenemos que la quinta fila son las particiones en $k = 1,2,3,4,5$ partes de un conjunto de 5 elementos, por lo que la suma es el número que buscábamos, siendo

$$B_5 = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$$

■

Problema 2. – *Determina los números de Stirling de tipo II para* $n = 5$ *y* $k = 1,2,3,4,5$.

Solución: Por le problema anterior tenemos del triángulo que

$$S(5,1) = 1,\ S(5,2) = 15,\ S(5,3) = 25,\ S(5,4) = 10,\ S(5,5) = 1$$

y efectivamente el número de Bell es la suma de ellos.

■

Problema 3. – *Utiliza el principio de inclusión exclusión para determinar el numero de enteros entre 1 y 1000 que no sean divisibles ni por 3 ni por 7.*

Solución: Sean $A_1 = \{n \in [1000] : 3 \mid n\}$ y $A_2 = \{n \in [1000] : 7 \mid n\}$, entonces nos piden calcular $\left|A_1^c \cap A_2^c\right|$ por lo que, por el PIE, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|A_1^c \cap A_2^c\right| &= \sum_{I \subseteq [2]} (-1)^{|I|} \left|A_I\right| = \left|A_\varnothing\right| - \left|A_{\{1\}}\right| - \left|A_{\{2\}}\right| + \left|A_{\{1,2\}}\right| \\ &= \left|[1000]\right| - \left|A_1\right| - \left|A_2\right| + \left|A_1 \cap A_2\right| \end{aligned}$$

$$= 1000 - \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 1000 - 333 - 142 + 47 = 572$$

esto es pues la cantidad de múltiplos de un numero n menores a m es $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ y el hecho de que un numero n es divisible por 3 y 7 entonces $n = 3k \Rightarrow 7 \mid 3k \Rightarrow 7 \mid k \Rightarrow k = 7q$ por lo que $n = 21q$ y entonces $21 \mid n$ y viceversa si un numero es divisible por 21 entonces claramente lo será por 2 y 7, de esta manera $A_1 \cap A_2 = \{n \in [1000] : 21 \mid n\}$.

■

Problema 4. –

4. Utiliza el PIE para determinar el número de combinaciones con repetición de tamaño 11 se pueden formar con los elementos x_1, x_2 y x_3, si x_1 no puede aparecer más de r_1 =3 veces, x_2 no puede aparecer más de r_2 =4 veces, y x_3 no puede aparecer más de r_3 =6 veces. (Hint: llama A_i al conjunto de combinaciones con más de r_i elementos x_i, para i=1,2,3).

Solución: Por el PIE tenemos que el numero de combinaciones con repetición de tamaño 11 con las condiciones pedidas serán

$$\begin{aligned}\sum_{I \subseteq [3]} (-1)^{|I|} |A_I| &= |A_\varnothing| - |A_{\{1\}}| - |A_{\{2\}}| - |A_{\{3\}}| + |A_{\{1,2\}}| + |A_{\{1,3\}}| + |A_{\{2,3\}}| - |A_{\{1,2,3\}}| \\ &= |X| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

contemos cada uno de estos sumandos.

1) En este problema tenemos que X es el numero de combinaciones con repetición de los elementos x_1, x_2 y x_3, siendo pues las combinaciones con repetición de 3 en 11

$$|X| = \binom{3 + 11 - 1}{11} = \binom{13}{11} = 78$$

2) Para cada A_i haremos algo similar, para el primero queremos contar las combinaciones con repetición de 3 en 11 de tal manera que el elemento x_1 aparezca más de $r_1 = 3$ veces es decir 4 veces al menos. Para esto simplemente fijamos cuatro x_1´s y los agregamos a cada combinación con repetición de 3 en 7, de esta manera aseguramos que cada combinación tiene al menos cuatro x_1´s, siendo entonces un total de

$$|A_1| = \binom{3 + 7 - 1}{7} = \binom{9}{7} = 36$$

y de forma análoga tendremos que

$$|A_2| = \binom{3 + 6 - 1}{6} = \binom{8}{6} = 28 \quad \text{y} \quad |A_3| = \binom{3 + 4 - 1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

3) Para cada $A_i \cap A_j$ haremos algo similar, para el primero queremos contar las combinaciones con repetición de 3 en 11 de tal manera que el elemento x_1 aparezca más de $r_1 = 3$ veces, es decir, al menos 4 veces y el elemento x_2 aparezca mas de $r_2 = 4$ veces, es decir, al menos 5 veces. Para

esto simplemente fijamos cuatro $x_1{}'s$ y cinco $x_2{}'s$ y los agregamos a cada combinación con repetición de 3 en 2, de esta manera aseguramos que cada combinación tiene al menos cuatro $x_1{}'s$ y cinco $x_2{}'s$, siendo entonces un total de

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

y de forma análoga tendremos que

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3+0-1}{0} = \binom{2}{0} = 1 \quad \text{y} \quad |A_2 \cap A_3| = 0$$

este ultimo es cero pues no hay ninguna combinación donde se repita el primer elemento mas de 4 veces y el tercero mas de 6 veces, pues la longitud máxima es de 11.

4) Para el ultimo igualmente no hay ninguna combinación que cumpla dichas condiciones pues la longitud máxima es de 11. Es decir

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

Por lo tanto, que el número de combinaciones con repetición de tamaño 11 con las condiciones pedidas serán $78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$.

■

Obs.- Un Desarreglo es una permutación de un conjunto donde no hay ningún punto fijo por ejemplo un desarreglo para $\{1,2,3,4\}$ es $(3,4,1,2)$.

Problema 5. – *¿Cuántas permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\}$ hay con exactamente un punto fijo?*

Solución: Primero seleccionamos el elemento que será punto fijo, para lo cual tenemos n opciones luego de esto para los $n-1$ elementos restantes debemos hacer un desarreglo, pues no puede haber ningún otro punto fijo, por lo que usando el apéndice de Desarreglos tenemos que serán en total

$$A = nD_{n-1} = n(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}$$

o también

$$A = nD_{n-1} = \begin{cases} n\left\lfloor \dfrac{(n-1)!}{e} \right\rfloor & \text{si } n \text{ impar} \\ n\left\lfloor \dfrac{(n-1)!}{e} + 1 \right\rfloor & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

■

APENDICE "DESARREGLOS"

Proposición. – El número de Desarreglos de un conjunto de n elementos es

$$D_n == n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Demostración: Primeramente, recordemos que una permutación de un conjunto de n elementos es una función inyectiva (por tanto, biyectiva pues la imagen y dominio son lo mismo), en este sentido podemos ver que un Desarreglo es una función inyectiva tal que no tiene ningún punto fijo, con esto en mente hagamos lo siguiente.

Sea $X = \{f : [n] \to [n] : f \text{ inyectiva}\}$ y sean $A_i = \{f : [n] \to [n] : f \text{ inyectiva y } f(i) = i\}$ para $i = 1,..,n$. Con ello tendremos que

$$f \text{ es desarreglo si y solo si } f \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

esto pues si f es desarreglo entonces no fija ningún punto, por lo que $f \notin A_i, \forall i$ y por el otro lado si $f \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ entonces $f \notin A_i, \forall i$, es decir, no fija ningún punto. Por lo tanto, por el Principio de Inclusión Exclusión el número de desarreglos será

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|}\left|A_I\right| \\ &= \left|A_\varnothing\right| - \left[\left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \cdots\right] + \left[\left|A_1 \cap A_2\right| + \left|A_1 \cap A_3\right| + \cdots\right] - \cdots + (-1)^n\left|A_1 \cap \cdots \cap A_n\right| \\ &= L_0 - L_1 + L_2 - L_3 + \cdots + (-1)^n L_n \end{aligned}$$

ahora veamos cada miembro de esta suma. Tenemos que L_0 es la cantidad de permutaciones del conjunto X las cuales sabemos que son $n!$, es decir, $L_0 = n!$. Ahora para L_1 lo que hacemos es contar todas las permutaciones que fijan **al menos un punto**, claramente habrá sobre conteos, pero como vimos al inicio esto no nos importará pues al final obtendremos el numero que buscamos. Para esto lo que hacemos es primero elegimos el lugar del punto fijo donde tengo n opciones, o lo que es lo mismo de los n elementos selecciono uno, y esto lo puedo hacer de $[n \text{ en } 1] = n$ maneras, luego con los $n-1$ elementos restantes hago una permutación, por lo que hay

$$\binom{n}{1}(n-1)!$$

formas de hacerlo. Para L_2 igualmente, vemos de cuantas formas podemos seleccionar 2 elementos que serán puntos fijos, y para estos hay $[n \text{ en } 2]$ formas de hacerlo y luego para los elementos restantes hacemos una permutación, siendo en total

$$\binom{n}{2}(n-2)!$$

formas de hacerlo. Y haciendo este procedimiento tenemos que

$$
\begin{aligned}
D_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\
&= \binom{n}{0}(n-0)! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

■

Corolario. – Se tiene que

$$
D_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor & \text{si } n \text{ impar} \\ \left\lfloor \frac{n!}{e} + 1 \right\rfloor & \text{si } n \text{ par} \end{cases}
$$

Demostración: Lo probaremos para n impar, el otro caso es parecido, solo con unas modificaciones. Sea n impar, por la proposición anterior tenemos que

$$
D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \cdot b
$$

PD] $n! \cdot b = \lfloor n! e^{-1} \rfloor$ PD] $n! \cdot b \leq n! e^{-1} \leq n! \cdot b + 1$ (en el caso de n par estas desigualdades cambian a $n! \cdot b - 1 \leq n! e^{-1} \leq n! \cdot b$)

Por un lado, sabemos que para $x < 0$ y n impar

$$
e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{-1} \geq b \Rightarrow n! b \leq n! e^{-1}
$$

(en el caso n par se tiene que para $x < 1$, la desigualdad de la exponencial es al revés)

Por otro lado, tenemos que

$$
e^{-1} \cdot n! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!} = n! b + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!}
$$

entonces basta probar que el segundo sumando es menor a 1. En efecto, tenemos

$$
\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k(k-1)\cdots(n+1)n\cdots 2 \cdot 1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k-1)\cdots(n+1)}
$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdots \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdots \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k = \frac{1}{n} < 1$$

por lo tanto $e^{-1} \cdot n! = n!b + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!} < n!b + 1$ que es la segunda desigualdad que queríamos, con lo que probamos $n! \cdot b = \left\lfloor n! e^{-1} \right\rfloor$.

■