Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Seminario de Combinatoria
Tarea 5

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

NOTACIÓN: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ = # permutaciones con k ciclos del conjunto $[n]$ de esta manera tendremos que

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Lema. - Sea $n > 0$ y $k \leq n$, entonces

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

Demostración: Tenemos que el número de permutaciones del conjunto $[n+1]$ en k ciclos es

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}$$

veamos otra forma de contar esto. El número de permutaciones en $k+1$ ciclos será el total de permutaciones en $k+1$ ciclos que dejen al 1 fijo más aquellas permutaciones en $k+1$ ciclos que no lo dejan fijo.

Para lo primero, como 1 será punto fijo solamente tengo que hacer una permutación en k ciclos (pues el 1 ya será un ciclo) de los n elementos restantes, siendo en total

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

y en el otro caso primero hago una permutación de $k+1$ ciclos de todos los elementos excepto el 1, y luego selecciono el valor que le asignare al 1, donde hay n posibles opciones (pues no lo mandare al 1 sino seria punto fijo) de esta manera habrá

$$n\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, hay en total $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$ formas hacerlo, por lo tanto, se tiene el resultado.

$\blacksquare$

PARENTESIS: Resolveré los problemas en un orden distinto a como están, esto pues las relaciones demostradas en el nuevo orden sirven para los correspondientes consecuentes.

Problema 4. – *Demuestra que* $|s(n,1)| = (n-1)!$ *usando la relación de recurrencia y luego demostrándolo directamente.*

Demostración: Tenemos las dos formas de demostrar este hecho.

⊗ Por el lema

$$|s(n,1)| = \left|(-1)^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$|s(n,1)| = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)\left\{\begin{bmatrix} n-2 \\ 0 \end{bmatrix} + (n-2)\begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = (n-1)(n-2)\begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo que haciendo este procedimiento $n-1$ veces obtenemos que

$$|s(n,1)| = (n-1)(n-2)\cdots 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \cdot 1 = (n-1)!$$

⊗ Queremos contar el número de permutaciones en 1 ciclo del conjunto $[n]$. Tenemos que una permutación de un ciclo es de la forma $(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ con $1 \leq a_i \leq n$ y $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ y además $a_i \neq i$ pues no podemos tomar puntos fijos ya que de hacerlo tendríamos más de un ciclo, con ello hay $n-1$ posibles valores para a_1, $n-2$ valores posibles para a_2 (no puede ser 2 ni a_1) y asi sucesivamente tendremos que hay $n!$ formas de crear esta permutación de un ciclo, sin embargo, hay repeticiones, pues dada por ejemplo

$$(1\ 3\ 5\ 4\ 2) = (3\ 5\ 4\ 2\ 1)$$

donde la segunda permutación es la misma que la primera solo que desplazada un numero a la izquierda. Con esto tenemos que al ser n números hay n permutaciones que son iguales ya que solo son desplazar los números a la izquierda, por lo que en total serán

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

de donde $|s(n,1)| = (n-1)!$

■

Problema 1 y 2. – *Demuestra que*

$$s(n+1,\ k) = s(n,k-1) - ns(n,k)$$

y úsalo para encontrar $s(5,k)$ *con* $1 \leq k \leq 5$.

Demostración: Por el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} s(n+1,\ k) &= (-1)^{n+1-k}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n+1-k}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right\} \\ &= (-1)^{n+(k-1)}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{n-k}n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n+(k-1)}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} - n(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\ &= s(n,k-1) - ns(n,k) \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que el número de Stirling de tipo I cumple una relación tipo pascal, donde cada valor consecutivo de los números de Stirling los puedo calcular mediante un triangulo

$$\begin{array}{ccccc} & & s(1,1) & & \\ & s(2,1) & & s(2,2) & \\ s(3,1) & & s(3,2) & & s(3,3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

sabeos que $s(1,1) = 1,\ s(2,1) = -1,\ s(2,2) = 1$ y aquí abrimos un paréntesis, pues, para poder rellenar dicho triangulo primeramente necesitamos saber los extremos, es claro que $s(n,n) = 1$ pues para cada valor se le asigna el mismo como punto fijo. Y para el extremo derecho usamos lo demostrado en el problema 4 que $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, por lo que obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & 1 & & & \\ & & 2 & & & & 1 & & \\ & -6 & & & & & & 1 & \\ 24 & & & & & & & & 1 \end{array}$$

de donde usando lo demostrado al inicio de este ejercicio para rellenar los huecos faltantes obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & 1 & & & \\ & & 2 & & -3 & & 1 & & \\ & -6 & & 11 & & -6 & & 1 & \\ 24 & & -50 & & 35 & & -10 & & 1 \end{array}$$

de donde

$$s(5,1) = 24,\ s(5,2) = -50,\ s(5,3) = 35,\ s(5,4) = 10,\ s(5,5) = 1$$

■

Problema 3. – *Prueba de forma directa que* $S(n,1) = 1$, $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$, $S(n,n-1) = (n \text{ en } 2)$ *. Encuentra una fórmula para* $S(n,n-2)$ *.*

Demostración:

a) Tenemos que $S(n,1)$ es el número de particiones del conjunto $[n]$ en 1 parte, por lo que la única posible es justamente $[n]$ pues cumple por vacuidad las propiedades de partición.

b) Queremos saber el número de particiones en dos partes que podemos hacer. Para esto notemos lo siguiente:

Sea $A \subseteq [n]$, $A \neq \emptyset$ y $A \neq [n]$, entonces $P = \{A,\ [n] \setminus A\}$ es partición de $[n]$. En efecto tenemos que $P \subseteq \wp([n])$, también claramente los elementos de P son ajenos no vacíos y además $A \cup ([n] \setminus A) = [n]$ por lo tanto P es partición de $[n]$.

Con ello tenemos que por cada subconjunto no vació de $[n]$ obtenemos una partición en dos partes, así dado que el numero de subconjuntos de $[n]$ es 2^n y quitando el vació y el total obtenemos que hay $2^n - 2$ subconjuntos, sin embargo aquí por cada subconjunto tenemos que su complemento es parte de los elementos, por lo que estaríamos contando doble, por lo que los quitamos, teniendo pues que

$$S(n,2) = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$$

c) Primero hagamos dos observaciones.

• Si suponemos que cada uno de los elementos de la partición $(A_1, .., A_{n-1})$ tiene cardinalidad 1 tendríamos que

$$n = \|[n]\| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| \underset{ajenos}{=} \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| = \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n - 1 \text{ !!!}$$

por lo que esto no puede pasar.

• Si suponemos que de los elementos de la partición $(A_1, .., A_{n-1})$ hay al menos 2 con cardinalidad 2 y todos los demás tienen cardinalidad 1 tendríamos que

$$n = \|[n]\| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| \underset{ajenos}{=} \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| = |A_i| + |A_j| + \sum_{i \neq j,k} |A_i| \leq 2 + 2 + (n-3) = n + 1 \text{ !!!}$$

por lo que esto no puede pasar.

De estas dos observaciones concluimos que dada una partición en $n-1$ partes se tiene que únicamente hay un elemento de la partición con 2 elementos y todas las demás partes son de un único elemento. Esto quiere decir que cada partición en $n-1$ partes queda totalmente determinad por el elemento de la partición que tiene cardinalidad 2 (2 elementos) por lo que el numero total de estas particiones serán la cantidad de formas que puedo elegir 2 elementos de mi conjunto $[n]$ sin repetir y sin orden, de donde concluimos que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

d) De forma similar al problema anterior tenemos que las únicas posibilidades para las particiones en $n-2$ partes son dos, aquellas particiones donde uno de sus elementos tiene cardinalidad 3 y todas las demás 1 y aquellas particiones donde hay 2 elementos de carnalidad 2 y todas las demás de cardinalidad 1.

Para la primera posibilidad tenemos que la partición queda totalmente determinada por el elemento de la partición de cardinalidad 3 y para estas hay

$$\binom{n}{3}$$

formas de elegir esos tres elementos de $[n]$ y por tanto esas son todas las posibles particiones donde un elemento de la partición tiene cardinalidad 3.

Para la segunda posibilidad igualmente la partición queda determinada por como escojamos los dos elementos de cardinalidad 2. Primero escogemos dos elementos de $[n]$ para lo cual hay

$$\binom{n}{2}$$

formas de hacerlo y con ellos formamos el primer conjunto de cardinalidad 2 de la particion, luego para el segundo conjunto tenemos $n-2$ posibles elecciones, de donde tomaremos nuevamente 2 elementos teniendo

$$\binom{n-2}{2}$$

formas de hacerlo, por lo que en total hay

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

formas de escoger dos subconjuntos de cardinalidad 2 de $[n]$, sin embargo, aquí hacemos repeticiones, pues por cada par de conjuntos que tome A_1A_2 tenemos que también contamos el par A_2A_1 donde los elementos son los mismos pero escogidos en el orden inverso, por lo que en realidad el total de formas de escoger dos subconjuntos de cardinalidad 2 de $[n]$ sin repetir es

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

por lo tanto, de lo anterior concluimos que

$$S(n, n-2) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}$$

■

Problema 5. –

5. This exercise outlines a proof that $t^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(t)_k$.

5.6. Exercises 85

(a) Let t be a positive integer, $T = \{1, \ldots, t\}$, and $N = \{1, \ldots, n\}$. The number of functions $f : N \to T$ is t^n. Given such a function f, define an equivalence relation $\equiv$ on N by the rule

$$i \equiv j \quad \text{if and only if} \quad f(i) = f(j).$$

The classes of this equivalence relation can be numbered $C_1, \ldots, C_k$ (say), ordered by the smallest points in the classes. (So C_1 contains 1; C_2 contains the smallest number not in C_1; and so on.) Then the values $f(C_1), \ldots, f(C_k)$ are k distinct elements of T, and so can be chosen in $(t)_k$ ways; the partition can be chosen in $S(n,k)$ ways. Summing over k proves the identity *for the particular value of* t.

(b) Prove that if a polynomial equation $F(t) = G(t)$ is valid for all positive integer values of the argument t, then it is the polynomials F and G are equal.

Demostración: Esto es sencillo de probar, sabemos que F y G son polinomios, por lo que el nuevo polinomio $L(t) = F(t) - G(t)$ será tal que $grad(L) \leq \max(grad(F), grad(G)) < \infty$, con esto, si suponemos que $F(t) = G(t)\ \forall t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow L(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{Z}^+$ pero esto es imposible por el teorema fundamental del algebra ya que si L es un polinomio no nulo debería tener solo un numero finito de ceros, por lo que la única posibilidad es que $L(t) \equiv 0$ es decir $L(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow F = G$.

■