Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Seminario de Combinatoria

Tarea 6

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 2 Cameron. –

2. If $n = 2k$, an intersecting family of k-subsets of an n-set has size at most $\frac{1}{2}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, because it contains at most one of each complementary pair of k-sets. We proceed to generalise this result and argument. What follows could be regarded as a very simple version of the LYM technique. PROVE:

Suppose that k divides n. Then an intersecting family $\mathcal{F}$ of k-subsets of an n-set X has size at most $\binom{n-1}{k-1}$.

[HINT: Let $\mathcal{C}$ be the set of all partitions of X into n/k subsets of size k. We don't need to know $|\mathcal{C}|$ (though this could be counted), merely the fact that each k-set lies in $|\mathcal{C}|/\binom{n-1}{k-1}$ members of $\mathcal{C}$. Prove this by double-counting pairs (B, C), where B is a k-set and $C \in \mathcal{C}$ with B a member of C.]

Now double-count pairs (B, C), with $B \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{C}$, and $B \in C$, to obtain

$$|\mathcal{F}| \cdot |\mathcal{C}| \Big/ \binom{n-1}{k-1} \leq |\mathcal{C}| \cdot 1,$$

using the fact that, since the parts of a partition are disjoint, at most one of them lies in any intersecting family.

Demostración: Lo intentaremos probar de una forma distinta. Un enunciado equivalente es el siguiente:

Teorema. - Si $n = mk$, entonces una familia intersectante de $k-$subconjuntos de un $n-$conjunto tiene tamaño a lo sumo $\frac{1}{m}\binom{n}{k}$.

Dem. – Veamos el caso en que $m = 2$, aquí si suponemos que tenemos una familia intersectante de k-subcojuntos , tenemos que por cada elemento en la familia, su complemento no pertenece a ella, es decir, si tomo 1 descarto la posibilidad de 1 subconjunto, siendo asi que por mi elección ya hay 2 subconjuntos descartados, ahora si selecciono otro, su complemento no estará, por lo que ahora son $2 + 2 = 4$ subconjuntos que ya tengo descartados, y este procedimiento lo puedo hacer a lo sumo k veces (así son $2(k-1) + 2 = 2k = n$ subconjuntos descartados), es decir, selecciono únicamente k veces subconjuntos de k elementos de los $n = 2k$ elementos posibles, siendo pues el total de subconjuntos que tome la mitad del total de subconjuntos posibles, es decir $\frac{1}{2}\binom{n}{k}$.

Ahora en general, , tenemos que por cada elemento en la familia, su complemento no pertenece a ella, es decir, si tomo 1 de tamaño k descarto la posibilidad de 1 subconjunto de tamaño $mk - k = (m-1)k$, pero este subconjunto lo puedo dividir en $m-1$ conjuntos de tamaño k, por lo que por mi elección ya hay $1 + (m-1) = m$ subconjuntos descartados de tamaño k, ahora si selecciono otro, su complemento no estará, por lo que ahora son $m + m = 2m$ subconjuntos que ya tengo descartados, y este procedimiento lo puedo hacer a lo sumo k veces (así son $mk = n$ subconjuntos descartados), es decir, selecciono únicamente k veces subconjuntos de k elementos de los $n = mk$ elementos posibles, siendo pues el total de subconjuntos que tome la $\frac{1}{m}$ del total de subconjuntos posibles, es decir $\frac{1}{m}\binom{n}{k}$.

Este resultado es equivalente, pues si k divide a n entonces $n = mk$ p.a $m \in \mathbb{Z}$ por lo que es equivalente estudiar los múltiplos de n. Asi mismo se tiene que

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k}\frac{n-k}{n} = \left[1 - \frac{n-k}{n}\right]\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{mk}\binom{n}{k} = \frac{1}{m}\binom{n}{k}$$

■

Problema 8 Cameron. –

8. Let $\mathcal{F}$ be a Sperner family of subsets of the n-set X. Define $b(\mathcal{F})$ to be the family of all subsets Y of X such that

(i) $Y \cap F \neq \emptyset$ for all $F \in \mathcal{F}$;

(ii) Y is minimal subject to (i) (i.e., no proper subset of Y satisfies (i)).

(a) Prove that $b(\mathcal{F})$ is a Sperner family.

(b) Show that, for any $F \in \mathcal{F}$ and any $y \in F$, there exists $Y \in b(\mathcal{F})$ with $Y \cap F = \{y\}$.

(c) Deduce that $b(b(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

(d) Let $\mathcal{F}_k$ denote the Sperner family of all k-subsets of X. Prove that $b(\mathcal{F}_k) = \mathcal{F}_{n+1-k}$ for $k > 0$. What is $b(\mathcal{F}_0)$?

Demostración:

(a) Sean $A, B \in b(\mathcal{F})$ y supongamos que $A \subset B$, entonces tendríamos que existe $A \subset B$ tal que $A \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}$ lo cual contradice que B sea mínimo, por tanto $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

(b) Sea $F \in \mathcal{F}$ y $y \in F$ fijos pero arbitrarios. Consideremos Y de la siguiente manera: El primer elemento de Y es y, ahora sea $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F$ y tomemos $y_1 \in F_1$ tal que $y_1 \neq y$, lo cual podemos hacer pues como $F, F_1 \in \mathcal{F}$ entonces existe algún elemento que no está en los dos al mismo tiempo, este será el segundo elemento de Y. Ahora sea $F_2 \in \mathcal{F}$, $F_2 \neq F, F_1$ y tomemos $y_2 \in F_2$ tal que $y_2 \neq y, y_1$, esto lo podemos hacer pues como $F_2 \in \mathcal{F}$ entonces existe algún elemento de F_2 que no está ni en F ni en F_1 (esto es la definición de una familia Sperner), de esta manera podemos proseguir tomando a todos los elementos $F \in \mathcal{F}$. Veamos que es el conjunto buscado.

- $Y \in b(\mathcal{F})$. En efecto, tenemos por construcción que $Y \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}$, ahora veamos que es mínimo. Supongamos que existe $\tilde{Y} \subset Y$ tal que satisface la primer propiedad, entonces tendríamos que existe $x \in Y$ tal que $x \notin \tilde{Y}$, pero por construcción sabemos que existe un único $F_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F$ por lo que tendríamos que $\tilde{Y} \cap F_x = \varnothing$!!! lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto Y es mínimo. Con esto $Y \in b(\mathcal{F})$.

- Igualmente, por construcción $Y \cap F = \{y\}$. Terminando la prueba.

$\blacksquare$

(c)

$\subseteq]$ Sean $X, Y \in b(b(\mathcal{F}))$ entonces como X y Y son mínimos por definición, se tendrá que $X \not\subset Y$ y $Y \not\subset X$ y además como $X \cap F \neq \varnothing$ y $Y \cap F \neq \varnothing$ $\forall F \in b(\mathcal{F})$ se tiene pues que $X, Y \in \mathcal{F}$ de tal manera $b(b(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F}$.

$\supseteq]$ Sea $Y \in \mathcal{F}$, y sea $F \in b(\mathcal{F})$ PD] $Y \cap F \neq \varnothing$ y Y es mínimo. Como $F \in b(\mathcal{F})$ tendremos que $F \cap Y \neq \varnothing$ por definición. Ahora supongamos que existe $\tilde{Y} \subset Y$ que cumple la primera condición, entonces tendríamos que $\tilde{Y} \cap Y \neq \varnothing$ y por tanto F no seria mínimo en sus condiciones, lo cual no puede pasar, por tanto, Y es mínimo. De esta manera $\mathcal{F} \subseteq b(b(\mathcal{F}))$.