Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Seminario de Combinatoria

Tarea 7

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Proposición 9.5.1. –

(9.5.1) Proposition. *In a projective plane of order q, the following hold:*

- *any point lies on $q+1$ lines;*
- *two lines meet in a unique point;*
- *there are q^2+q+1 lines.*

Demostración:

i) Sea $x \in X$, (por lo que nos quedan $q^2 + q$ puntos) y ahora sea $x_1 \neq x$, para el cual sabemos que existe una única línea de $q + 1$ puntos (incluyendo x y x_1) que pasa por los dos, con ello tengo una primera recta. Ahora, hecho esto me quedan $q(q + 1) - q$ puntos restantes, por lo que tomo $x_2 \neq x_1 \neq x$ y nuevamente existe una única línea que une a x_2 y x por lo que tengo mi segunda recta y me quedan $q(q + 1) - 2q$ puntos. De esta manera puedo proseguir, de donde al final puedo seleccionar $p + 1$ puntos distintos para los cuales existe una única línea para cada punto que lo une con x.

ii) Sea $\ell \in B$, entonces por el inciso anterior si tomamos $x \in \ell$ sabemos que existen $q + 1$ líneas (contando ℓ) a las que pertenece, es decir, para cualquier $\ell \in B$ existe otra recta con la cual se interseca. Ahora veamos que esta intersección es en únicamente un punto. Sean $\ell, \lambda \in B$ y supongamos que se intersecan en dos puntos x e y, sin embargo, con esto estaríamos diciendo que existen dos rectas para las cuales $x, y \in \ell$ y $x, y \in \lambda$ lo cual contradice las propiedades del plano proyectivo, con lo cual únicamente se intersecan en un único punto.

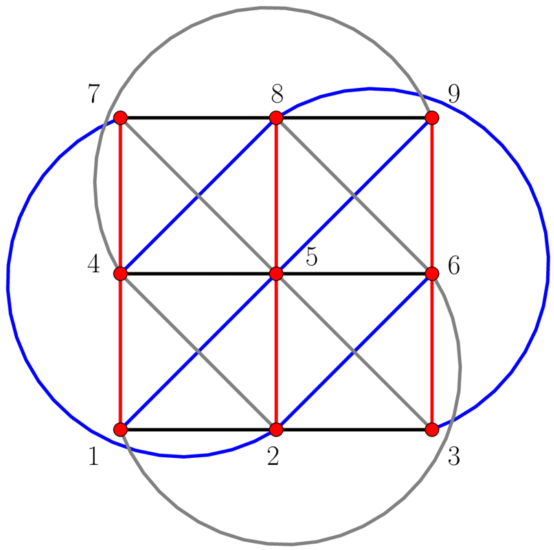
ii) Sea $\ell \in B$, sabemos que $|\ell| = q + 1$, entonces sea $x_1 \in \ell$ y por el primer inciso sabemos que existen $q + 1$ rectas que pasan por $x_!$ que son q rectas distintas de ℓ. Ahora sea $x_2 \in \ell,\ x_2 \neq x_1$ y nuevamente sabemos que por este punto pasan $q + 1$ rectas, que en realidad son q distintas a ℓ, y mas aun, estas rectas son distintas a las que pasan por x_1 pues si hubiera una que es de los dos puntos tendríamos que esa recta y ℓ se intersecan en dos puntos, lo cual por el inciso anterior no es posible. Por lo tanto, podemos seguir con este procedimiento hasta cubrir los $q + 1$ puntos de la recta ℓ teniendo en total $q(q + 1)$ rectas distintas a ℓ, y si sumamos esta ultima tendremos en total $q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$ rectas distintas. Para finalizar, notemos que estas son todas las rectas, pues si existiera una más sabemos que esa recta y ℓ se intersecan en un punto, por lo cual seria una de las rectas que ya contamos.

■

Problema 9a). –

9. (a) Prove that there is a unique projective plane of order 3.

Demostración: En efecto, notemos que existe un plano proyectivo afín de orden 3 el cual es el siguiente



Por lo que por el teorema 9.5.7 del libro de cameron se tiene que este es único y por tanto existe un único plano proyectivo de orden 3

■

Problema 10. –

10. Let $\mathcal{O}$ be an oval in a projective plane of even order q. Prove that the tangents to $\mathcal{O}$ all pass through a common point p, and that $\mathcal{O} \cup \{p\}$ is a set of $q+2$ points which meets every line in either 0 or 2 points. (Such a set is called a *hyperoval*. Note that, if any one of its points is omitted, the resulting set is an oval.) [HINT: Let x_i be the number of points not on $\mathcal{O}$ which lie on i tangents. Show that $x_0 = 0$, and calculate $\sum(i-1)(i-(q+1))x_i$.]

Demostración: Primero veamos que si Θ es un ovalo, entonces $|\Theta| = q+1$.
Sea $x \in \Theta$. Sabemos que por x pasan $q+1$ líneas (proposición 9.5.1) pero como $x \in \Theta$ entonces una de ellas es tangente, por lo que me quedan q líneas restantes que o son secantes o no tocan a ningún punto de Θ, pero lo segundo no es posible pues todas pasan por $x \in \Theta$ entonces necesariamente todas las q rectas son secantes (pues por la definición de ovalo solo existe una tangente por x). Ahora, como cada una de estas rectas es secante tendremos que para cada una de estas rectas existe otro punto $y \in \Theta$ por el cual pasa, mas aun, este punto es único, pues si suponemos que existe $z \in \Theta$ por el cual también pasa la recta, tendríamos que los puntos x, y, z estarían en la misma recta, lo cual es imposible por la definición de ovalo. De todo esto concluimos que por cada recta secante que pasa por q tengo un nuevo punto de mi ovalo de forma única, y además no me sobra ningún otro punto. Por lo tanto $|\Theta| = q+1$.

Ahora, usando lo probado en el libro tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum(i-1)(i-(q+1))x_i &= \sum(i-1)([i-1]-q))x_i = \sum[i(i-1)-iq-i+1+q]x_i \\
&= \sum i(i-1)x_i - (q+1)\sum ix_i + (q+1)\sum x_i = (q+1)q-(q+1)(q+1)q+(q+1)q^2 \\
&= (q+1)q[1-(q+1)+q] = (q+1)q[1-q-1+q] = (q+1)q[0] = 0
\end{aligned}
$$

NOTA: Aquí ya no supe cómo interpretar dicho hint. Hay varios detalles que no se explican pues el teorema sobre las sumas se usan potencias de primos impares y no hay explicación en el libro si es valido en general para cualquier otro orden. Igualmente, el porqué del valor de dichas sumas es ambiguo. Así como el teorema visto con la profesora era únicamente valido para ordenes pares por lo que no pude ver como proseguir con el ejercicio.