Combinatoria Analítica

Tarea 1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una clase combinatoria sin elementos de tamaño cero. Suponga que*

$$\mathfrak{M} = \mathrm{MuCon}(\mathfrak{B}) \ \ y \ \ \mathfrak{P} = \mathrm{Pot}(\mathfrak{B})$$

Demuestre que se satisface la ecuación funcional de Vallée:

$$M(z) = P(z)M(z^2)$$

Demostración. – De forma analítica recordemos que

$$M(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{B_n} \quad \text{y} \quad P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^n\right)^{B_n}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} P(z)M(z^2) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^n\right)^{B_n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^{2n}}\right)^{B_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^n\right)^{B_n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-z^n)(1+z^n)}\right)^{B_n} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+z^n}{(1-z^n)(1+z^n)}\right)^{B_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{B_n} = M(z) \end{aligned}$$

■

Problema 2. *Demuestre que*

$$[z^{n-1}]\frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Demostración. – Usando el teorema generalizado de newton obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}(1-4z)^{1/2} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4z)^n \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n z^n\right] \\ &= -\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-2)^n 2^n z^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(\frac{1}{2})(-2)(\frac{1}{2}-1)(-2)(\frac{1}{2}-2)\cdots(-2)(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}2^n z^n \\
&= -\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-1+2)(-1+4)\cdots(-1+2n-2)}{n!}2^n z^n \\
&= \frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)(3)\cdots(2n-3)}{n!}2^n z^n \\
&= \frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2)(3)(4)\cdots(2n-4)(2n-3)(2n-2)}{(2)(4)\cdots(2n-4)(2n-2)n!}2^n z^n \\
&= \frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(1)(2)\cdots(n-2)(n-1)n!}2^n z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{n+1}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}z^n
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$[z^{n-1}]\frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

■

Problema 3. *Sea $\mathfrak{T}$ la clase combinatoria de las triangulaciones de los $(n+2)$- polígonos (con n=0,1, 2, ...). Encuentre una especificación recursiva de $\mathfrak{T}$. De esta especificación deduzca una ecuación funcional satisfecha por T(z). Identifique la cuenta sucesiva de $\mathfrak{T}$.*

Solución. – En clase probamos que la clase combinatoria de las triangulaciones y la clase combinatoria de los arboles binarios eran isomorfas, por lo que la especificación recursiva será

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E} + \mathfrak{T} \times \mathrm{Z} \times \mathfrak{T}$$

por lo que su función generadora cumple la ecuación funcional:

$$T(z) = 1 + T(z)zT(z)$$

de donde se obtiene que

$$zT^2(z) - T(z) + 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$$

■

Problema 4. *Determine cuales de las siguientes clases combinatorias son isomorfas y, de ser el caso, construya explícitamente los isomorfismos combinatorios entre cada par de clases.*

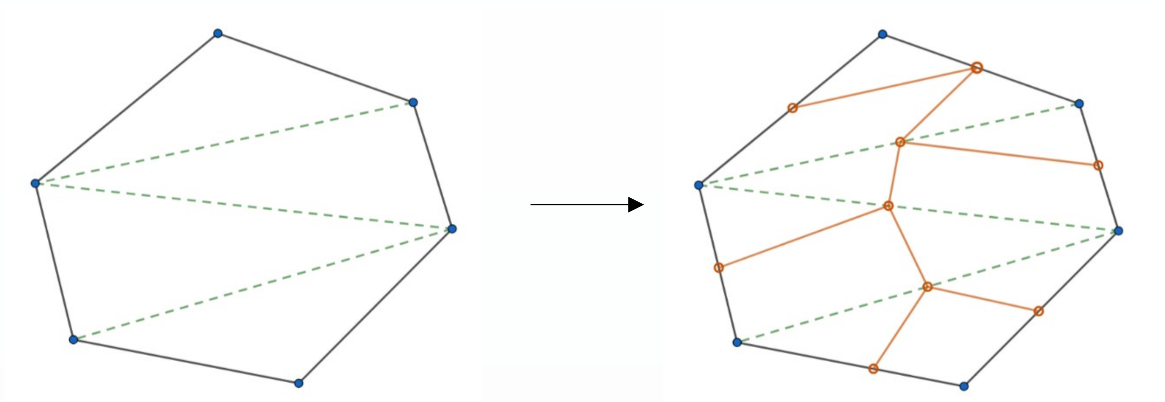
i) $\mathfrak{B}$:= arboles binarios, TAMAÑO: numero de nodos binarios

ii) $\mathfrak{N}$:= collares binarios, TAMAÑO: longitud del collar

iii) $\mathfrak{T}$:= triangulaciones de $(n+2)$- polígonos, TAMAÑO: numero de triangulaciones

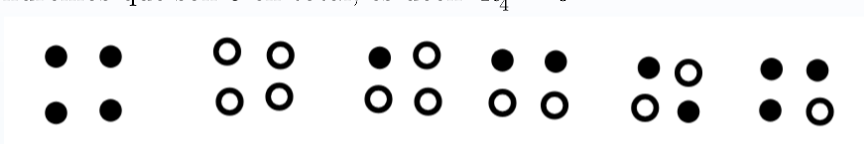
iv) $\mathfrak{G}$:= arboles planares generales, TAMAÑO: orden del árbol

Solución. – Solo son isomorfos, los arboles binarios y las triangulaciones pues por cada triangulación puedo construir un árbol binario de la forma siguiente: Tomamos una triangulación de un polígono, luego por cada lado de los triángulos trazamos un punto y una recta hacia los triángulos adyacentes

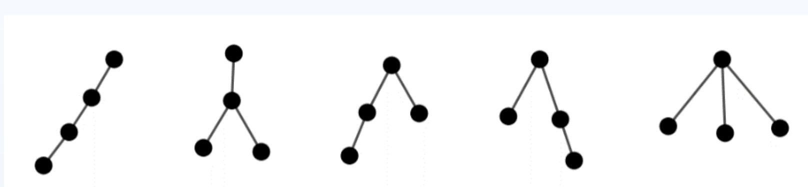


La figura resultante será nuestro árbol binario, y viceversa podemos construir a partir de un árbol binario una triangulación.

Los otros dos no son isomorfos entre sí, debido a lo siguiente: Si consideramos los collares binarios de tamaño 4, tendremos que son 6 en total, es decir $R_4 = 6$



Y sin embargo, el numero de arboles generales de tamaño 4 solo son más que 5, es decir, $G_4 = 5$

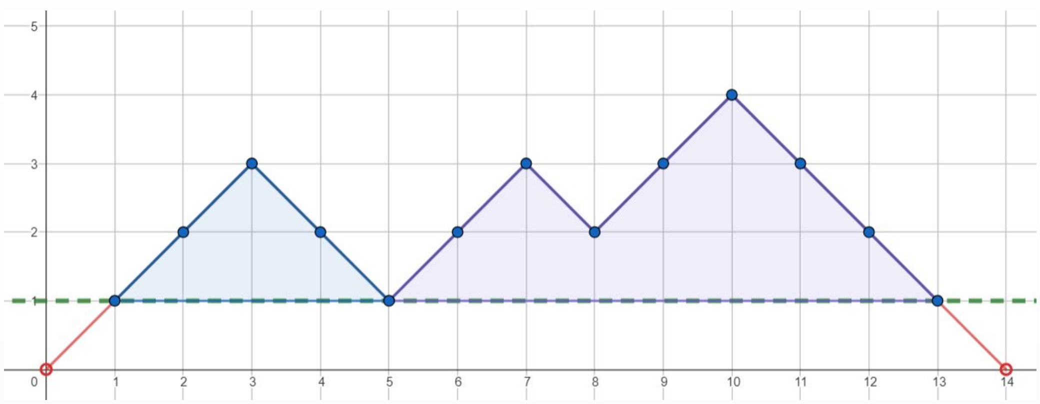


Por lo que no pueden ser isomorfos. (También notamos que no serán isomorfas a ninguna de las dos primeras pues $T_4 = 14$)

■

Problema 5a). *Una camino de Dick es un camino finito en el enrejado $\mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{Z}^{+}$ que comienza en $(0,0)$, en cada paso se mueve una unidad a la derecha ya sea en diagonal hacia arriba o diagonal hacia abajo ($\nearrow$, $\searrow$), y termina en $(n,0)$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^{+}$ (en este caso n es el tamaño del camino). Encuentre la función generadora de la clase $\mathfrak{M}$ de los caminos de Dick.*

Solución. – Primeramente, notemos que un camino de Dick siempre empieza con un movimiento diagonal hacia arriba $\nearrow$, pues nuestra área de movimiento es $\mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{Z}^{+}$ por lo que el primer movimiento no puede ser hacia abajo y similarmente siempre termina con un movimiento hacia abajo, pues no puede llegar desde más abajo del eje x. Lo segundo que hay que notar es que para que un camino cualquiera (interpretando por camino a una sucesión de subir y bajar) será de Dick si y solo si el número de veces que se sube es igual al numero de veces que se baja, y esto es claro pues cada movimiento de subir y bajar me suma y resta en 1 el valor de la coordenada en y, por lo que la única forma en que una sucesión de 1´s y -1´s me de cero es que sean la misma cantidad. Esto también me dice entonces que NO hay caminos de Dick de tamaño impar (pues no hay forma en que sean la misma cantidad de subidas y bajadas), entonces todos los caminos de Dick son de tamaño par.



Con esto ya podemos dar una especificación de los caminos de Dick. Un camino de Dick no es más que una sucesión de $\nearrow$ y $\searrow$, donde cada sucesión (camino) empieza con el símbolo $\nearrow$ seguido de una sucesión caminos de Dick y termina con el símbolo $\searrow$ (notemos que no hay caminos de tamaño cero pues por definición $n \in \mathbb{Z}^{+}$). Entonces la clase queda caracterizada por

$$\mathfrak{M} = \nearrow \operatorname{Suc}(\mathfrak{M}) \searrow$$

Por lo que la función generadora cumplirá la ecuación funcional:

$$M(z) = z\frac{1}{1 - M(z)}z \iff M(z) = \frac{z^2}{1 - M(z)} \iff M(z) - M^2(z) = z^2$$

$$\iff M^2(z) - M(z) + z^2 = 0 \iff M(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2}$$

de donde prosiguiendo como en el problema 2, obtenemos que

$$M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n} z^{2n}$$

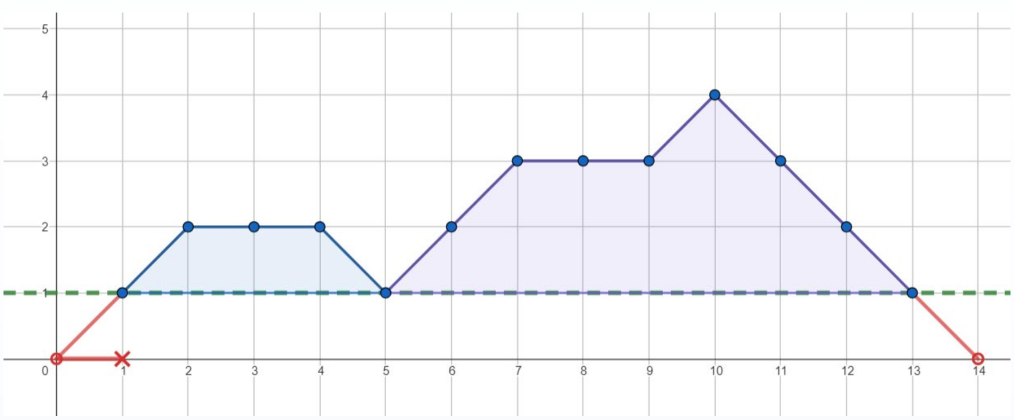
por lo que $M_{2n} = \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n}$.

■

Problema 5a). *Una camino de Motzkin es un camino finito en el enrejado $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que comienza en $(0,0)$, en cada paso se mueve una unidad a la derecha ya sea en diagonal hacia arriba, diagonal hacia abajo o en horizontal ($\nearrow$, $\searrow$, $\rightarrow$), y termina en $(n,0)$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$ (en este caso n es el tamaño del camino). Encuentre la función generadora de la clase $\mathfrak{M}$ de los caminos de Dick.*

Solución. – Haciendo el mismo análisis podemos notar que la caracterización es igual a los caminos de Dick, pero notando un cambio importante, y es que al inicio de un camino ahora tenemos dos posibles opciones, o subimos diagonalmente o nos mantenemos horizontales y en dado caso el camino terminará (otra importante es que ahora si puede haber caminos de tamaño impar), por lo que la nueva caracterización será:

$$\mathfrak{M} = \rightarrow + \nearrow \mathrm{Suc}(\mathfrak{M}) \searrow$$



Por lo que la función generadora cumplirá la ecuación funcional:

$$M(z) = z + z\frac{1}{1-M(z)}z \iff M(z) = z + \frac{z^2}{1-M(z)} \iff M(z) - M^2(z) = z - zM(z) + z^2$$

$$\iff M^2(z) - (z+1)M(z) + z^2 + z = 0 \iff M(z) = \frac{(z+1) - \sqrt{(z+1)^2 - 4(z^2+z)}}{2}$$

$$\iff M(z) = \frac{(z+1) - \sqrt{1-2z-3z^2}}{2} \iff M(z) = \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1+z)(1-3z)}$$

de donde encontraremos el termino general, procediendo:

$$\begin{aligned}
M(z) &= \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1+z)(1-3z)} \\
&= \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+z}\sqrt{1-3z} = \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-3z)^n\right) \\
&= \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n = \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n \\
&= \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n - \frac{1}{2}\binom{1/2}{0}\binom{1/2}{0}(-3)^0 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n - \frac{1}{2} \\
&= \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n \\
&= \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n - \frac{z}{2}\left(\binom{1/2}{0}\binom{1/2}{1-0}(-3)^{1-0} + \binom{1/2}{1}\binom{1/2}{1-1}(-3)^{1-1}\right) \\
&= \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n - \frac{z}{2}\left(\frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n - \frac{z}{2}(-1) \\
&= z - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n
\end{aligned}$$

Por tanto $M(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}\right)z^n$ de donde concluimos que el termino general vendrá dado por $M_1 = 1$ y $\forall n > 1$, $M_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}(-3)^{n-k}$

■

Problema 6. *Encuentre la función generadora del lenguaje* $\mathfrak{L}$ *que consiste en todas las palabras binarias sobre el alfabeto* $\{0,1\}$ *tales que ninguna palabra de* $\mathfrak{L}$ *contiene al* ***factor*** 00.

Solución. – Una palabra de este tipo es como la siguiente

$$\underbrace{11}\underbrace{011}\underbrace{0111}\underbrace{01}\underbrace{011}\underbrace{01}\underbrace{011}$$

Por lo que la podemos caracterizar de la siguiente manera: Empezamos con una sucesión de 1´s que puede ser vacía, luego tenemos una serie de sucesiones que son de la forma, una sucesión de un cero seguido de una sucesión de 1´s, y al final hay dos opciones, o termínanos con los 1´s que ya teníamos o terminamos con un único 0, por lo que nuestra especificación es:

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Suc}(1) \times \mathrm{Suc}(0 \times \mathrm{Suc}_{\geq 1}(1)) \times (\mathrm{E} + 0)$$

por lo que su función generadora será

$$L(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-(z)\left(\dfrac{1}{1-z}-1\right)} \cdot (1+z) = \frac{1+z}{1-z-z^2}$$

Por lo tanto

$$L(z) = \frac{1+z}{1-z-z^2}$$

■