Combinatoria Analítica

Tarea 2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Lema. *Si* $P(z) = (z - a_1)\cdots(z - a_n)$ *con* $a_k \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1/P'(a_k)}{z - a_k}$$

Demostración. – Por fracciones parciales sabemos que existen constantes $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - a_k}$$

con ello notemos que al ser $P(z)$ un polinomio, entonces la función $1/P(z)$ es meromorfa con polos simples en cada a_k, por lo que para $m \in \{1, 2, ..., n\}$ tendremos

$$\operatorname{Res}(\frac{1}{P(z)}, a_m) = \lim_{z - a_m} \frac{1}{P(z)}(z - a_m) \underset{\text{L´Hopital}}{=} \lim_{z - a_m} \frac{1}{P'(z)} = \frac{1}{P'(a_m)}$$

pero, por otro lado

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\frac{1}{P(z)}, a_m) &= \lim_{z - a_m} \frac{1}{P(z)}(z - a_m) = \lim_{z - a_m} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - a_k}(z - a_m) \\
&= \lim_{z - a_m} \left[\frac{A_k}{z - a_k} + \cdots + \frac{A_m}{z - a_m} + \cdots + \frac{A_n}{z - a_n} \right](z - a_m) \\
&= \lim_{z - a_m} \left[\frac{A_k(z - a_m)}{z - a_k} + \cdots + A_m + \cdots + \frac{A_n(z - a_m)}{z - a_n} \right] \\
&= 0 + \cdots 0 + A_m + 0 + \cdots 0 = A_m
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A_m = \dfrac{1}{P'(a_m)} \quad \forall m = 1, 2, ..., n$.

■

Tarea Moral. *Prueba que si* $S_n^{(r)}$ *es el número de particiones de un conjunto con* n *elementos en* r *partes, entonces*

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{r!}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}j^n$$

Demostración. – Por lo hecho en clase tenemos que

$$S_n^{(r)} = [z^n]S^{(r)}(z) = [z^n]z^r\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{1-jz} = [z^{n-r}]\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{1-jz} = [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{z-\frac{1}{j}}$$

Ahora, sea $P(z) = (z-\frac{1}{1})\cdots(z-\frac{1}{r})$ entonces por el Lema anterior,

$$S_n^{(r)} = [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}\frac{1\big/P'(\frac{1}{j})}{z-\frac{1}{j}}$$

de donde por la regla del producto

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{r}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r}(z-\tfrac{1}{i})$$

por lo que, para $j = 1,..,r$

$$P'(z) = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r}(z-\tfrac{1}{i}) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(z-\tfrac{1}{i})$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
P'(\tfrac{1}{j}) &= 0 + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(\tfrac{1}{j}-\tfrac{1}{i}) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}\frac{i-j}{ji}\\
&= \frac{1}{j^{r-1}\frac{r!}{j}}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(i-j) = \frac{1}{j^{r-2}r!}\prod_{i=1}^{j-1}(i-j)\prod_{i=j+1}^{r}(i-j) = \frac{(-1)^{j-1}}{j^{r-2}r!}\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\prod_{i=j+1}^{r}(i-j)\\
&= \frac{(-1)^{j-1}}{j^{r-2}r!}(j-1)!(r-j)! = \frac{(-1)^{j-1}}{j^{r-2}}\left[\frac{(j-1)!(r-j)!}{r!}\right] = \frac{(-1)^{j-1}}{j^{r-1}}\left[\frac{j!(r-j)!}{r!}\right] = \frac{(-1)^{j-1}}{j^{r-1}}\frac{1}{\binom{r}{j}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P'(\frac{1}{j}) = \dfrac{(-1)^{j-1}}{j^{r-1}} \dfrac{1}{\binom{r}{j}}$ por lo que

$$\begin{aligned}
S_n^{(r)} &= [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}\frac{1/P'(\frac{1}{j})}{z-\frac{1}{j}} = [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}j^{r-1}\binom{r}{j}}{z-\frac{1}{j}} \\
&= [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}\frac{-j}{-j}\frac{(-1)^{j-1}j^{r-1}\binom{r}{j}}{z-\frac{1}{j}} = [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j j^r\binom{r}{j}}{1-jz} \\
&= [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j^r\binom{r}{j}\frac{1}{1-jz} = [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j^r\binom{r}{j}\sum_{m=0}^{\infty}j^m z^m \\
&= [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^j j^r\binom{r}{j}j^m z^m = [z^{n-r}]\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j^r\binom{r}{j}j^m z^m \\
&= [z^{n-r}]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left[\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j^r\binom{r}{j}j^m\right]z^m = \frac{(-1)^r}{r!}\left[\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j^r\binom{r}{j}j^{n-r}\right] \\
&= \frac{(-1)^r}{r!}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}j^n
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_n^{(r)} = \dfrac{1}{r!}\displaystyle\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}j^n$

■

Problema 1. *Determine las funciones generadoras ordinarias de las siguientes clases combinatorias a partir de sus especificaciones.*

a) $\mathrm{Suc}_{\geq r}(\mathcal{E}+\mathcal{Z}^2)$

b) $\mathrm{Pot}(\mathrm{Suc}_{=1,2,3,4}(\mathcal{Z}))\times\mathcal{Z}\times\mathrm{Suc}_{=3,5,7}(\mathcal{Z}+\mathcal{Z})$

c) $\mathrm{MuCon}(\mathrm{Pot}(\mathcal{Z}\times\mathrm{Suc}_{\{2n:n\in\mathbb{N}\}}(\mathcal{Z})))$

Solución. – Llamemos por $\mathfrak{L}$ a las clases.

a) Obtenemos

$$L(z) = \sum_{k=r}^{\infty}(1+z^2)^k = \frac{(1+z^2)^r}{1-(1+z^2)} = \frac{(1+z^2)^r}{-z^2}$$

b) Primeramente, tenemos que si $\mathcal{A} = \mathrm{Suc}_{=1,2,3,4}(\mathcal{Z})$ entonces $A(z) = z+z^2+z^3+z^4$, por lo que $A_n = 1$ para $n = 1,2,3,4$ y $A_n = 0$, $\forall n > 4$. Con ello

$$
\begin{aligned}
L(z) &= \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)^{A_n}\right]\cdot z\cdot((2z)^3+(2z)^5+(2z)^7)\\
&= (1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)\cdot z\cdot(8z^3+32z^5+128z^7)\\
&= (1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)(8z^4+32z^6+128z^8)\\
&= 8z^4+8z^5+40z^6+48z^7+176z^8+208z^9+208z^{10}+336z^{11}+328z^{12}\\
&\quad +328z^{13}+296z^{14}+288z^{15}+160z^{16}+128z^{17}+128z^{18}
\end{aligned}
$$

c) Primeramente, tenemos que si $\mathcal{A}=\mathrm{Suc}_{\{2n:n\in\mathbb{N}\}}(\mathcal{Z})$ entonces la clase $\mathfrak{B}=\mathcal{Z}\times\mathcal{A}$ tiene como función generadora a $B(z)=zA(z)=z\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}$, por lo que $B_n=1$ para n impar y cero para n par. Con ello la clase $\mathfrak{M}=\mathrm{Pot}(\mathfrak{B})$ tiene como función generadora a

$$M(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k)^{B_k}=\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{2k-1})$$

Y finalmente, haremos uso de la función generadora de la clase MuCon en forma exp-log para evitarnos calcular los valores de M_n, siendo pues dado $\mathfrak{L}=\mathrm{MuCon}(\mathfrak{M})$ entonces

$$L(z)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(z^n)}{n}\right)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{\infty}(1+(z^n)^{2k-1})\right)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+z^{n(2k-1)}\right]\right)$$

■

Problema 2. *De una especificación de una clase combinatoria cuya función generadora coincida con la que se especifica:*

a) $\dfrac{z^{20}}{1-\frac{1}{1-z-z^5-z^{10}-z^{15}}}$

b) $\dfrac{z+z^2}{1-5z^3}\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)$

Solución. –

a) Consideremos $\mathfrak{L}=\mathcal{Z}^{20}\times\mathrm{Suc}(\mathrm{Suc}_{=1,5,10,15}(\mathcal{Z}))$ y es la buscada.

b) Consideremos $\mathfrak{L}=(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}^2)\times\mathrm{Suc}(\mathcal{Z}^3+\mathcal{Z}^3+\mathcal{Z}^3+\mathcal{Z}^3+\mathcal{Z}^3)\times\mathrm{Pot}(\mathrm{Suc}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ y es la buscada.

■

Problema 3. *Considere el alfabeto* $\{A,G,T,C\}$.

a) *Escriba la función generadora de la especificación regular* $A^*(C(G+T)^*AA)^*C$

b) *Encuentre un autómata finito determinista cuyo lenguaje es el de todas las palabras en las que ocurre* $ACAG$ *como factor.*

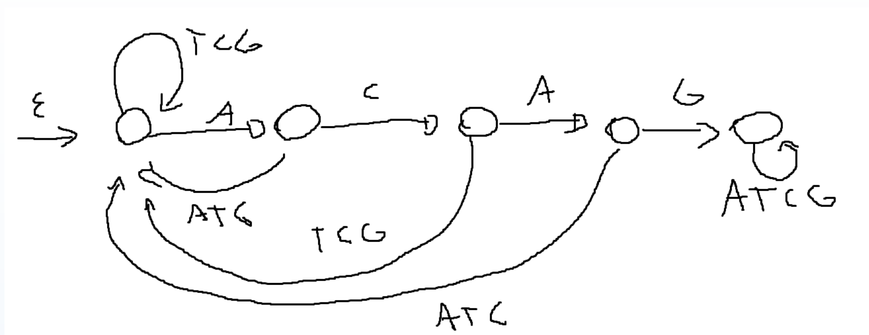
c) *Encuentre una expresión que describa la función generadora del lenguaje de todas las palabras en las que ocurre* AGT *como factor.*

Solución. – Sea $\mathfrak{L}$ el lenguaje formado por el alfabeto dado.

a) Obtenemos

$$F(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-\left(z\left(\frac{1}{1-2z}\right)z\cdot z\right)}z = \frac{z}{1-z-(1-z)\left(\frac{z^3}{1-2z}\right)} = \frac{z(1-2z)}{(1-z)(1-2z)-z^3(1-z)}$$

b)



c) Se puede especificar de la siguiente manera: Sea F el lenguaje de las palabras requeridas, entonces

$$F = \mathrm{Suc}(\mathfrak{L}) \times \mathrm{AGT} \times \mathrm{Suc}(\mathfrak{L})$$

$\blacksquare$

Problema 4. *Demuestra la fórmula de inversión de Lagrange en la forma de Burmann:*

Sea $\Phi(u) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k u^k \in \mathbb{C}[u]$ *con* $\Phi_0 \neq 0$, *entonces existe una única solución a la ecuación funcional*

$$y(z) = z\Phi(y(z))$$

en series, y sus coeficientes de dicha solución cumplen que

$$[z^n]y^k(z) = \frac{k}{n}[u^{n-k}]\Phi(u)^n$$

Demostración. – Llamemos por $y_n^{(k)}$ al n –ésimo término de la serie de $y^k(z)$, entonces

$$ny_n^{(k)} = [z^{n-1}](y^k(z))' = [z^{n-1}]ky^{k-1}(z)y'(z)$$

así por el teorema de Cauchy

$$ny_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{ky^{k-1}(z)y'(z)}{z^n}\,dz$$

pero por la ecuación funcional sabemos que $z = y(z)\big/\Phi(y(z))$ entonces

$$ny_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{ky^{k-1}(z)y'(z)}{(y(z)\big/\Phi(y(z)))^n}\,dz = \frac{k}{2\pi i}\oint \frac{y'(z)\Phi^n(y(z))}{y^{n-k+1}(z)}\,dz$$

y tomando $w = y(z)$ obtenemos

$$ny_n^{(k)} = \frac{k}{2\pi i}\oint \frac{\Phi^n(w)}{w^{n-k+1}}\,dz = k[u^{n-k}]\Phi(u)^n$$

por lo tanto, $[z^n]y^k(z) = y_n^{(k)} = \dfrac{k}{n}[u^{n-k}]\Phi(u)^n$. El ultimo paso se debe a que el índice sobre la curva sigue siendo 1, esto se prueba igual al caso de la forma de Lagrange.

■