Combinatoria Analítica

Tarea 3

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Determine las funciones generadoras exponenciales de las siguientes clases combinatorias a partir de sus especificaciones.*

a) $\mathrm{Con}(\mathrm{Suc}_k(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{Z}^{*2n}))$

b) $\mathrm{Suc}(\mathrm{Cic}_k(\mathrm{Con}(\mathcal{Z})))$

c) $\mathrm{Con}(\mathrm{Suc}(\mathrm{Con}_{n=2,4}(\mathcal{Z} + \mathcal{Z} * \mathcal{Z})))$

Solución. – Llamemos por $\mathfrak{L}$ a las clases.

a) Obtenemos

$$L(z) = \exp\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}\right)^k\right) = \exp\left(\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)^k\right) = \exp\left(\frac{z^{2k}}{(1-z^2)^k}\right)$$

b) Obtenemos

$$L(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{\left(\exp(z)\right)^k}{k}\right)} = \frac{k}{k-e^{kz}}$$

c) Obtenemos

$$L(z) = \exp\left(\frac{1}{1-\left(\frac{(z+z^2)^2}{2!}+\frac{(z+z^2)^4}{4!}\right)}\right) = \exp\left(\frac{4!}{4!-12(z+z^2)^2-(z+z^2)^4}\right)$$

■

Problema 2. *Encuentre la función generadora exponencial de la clase combinatoria de las permutaciones de enteros en r ciclos $P^{(r)}$ y determine explícitamente $P_n^{(r)}$.*

Demostración. – Una permutación en r ciclos no es mas que un conjunto de ciclos donde estos conjuntos son exactamente r, por lo que la especificación es

$$\mathfrak{P}^{(r)} = \mathrm{Con}_r(\mathrm{Cic}(\mathcal{Z}))$$

entonces la función generadora exponencial viene dada por

$$P^{(r)}(z) = \frac{\left(\log \frac{1}{1-z}\right)^r}{r!} = \frac{1}{r!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n\right)^r$$

y desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} P^{(r)}(z) &= \frac{1}{r!}\left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1} z^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2} z^{n_2}\right)\cdots\left(\sum_{n_r=1}^{\infty} \frac{1}{n_r} z^{n_r}\right) \\ &= \frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \frac{1}{n_1}\frac{1}{n_2}\cdots\frac{1}{n_r}\right] z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{r!}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \frac{1}{n_1 n_2\cdots n_r}\right]\frac{1}{n!} z^n \end{aligned}$$

entonces

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{r!}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \frac{1}{n_1 n_2\cdots n_r}$$

■

Problema 3. *De una especificación de una clase combinatoria cuya función generadora exponencial coincida con la que se especifica.*

a) $\dfrac{1}{1-\exp\left(\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^r}{r}\right)}$

b) $\dfrac{1}{r!}\left(\log\dfrac{1}{1-2z}\right)^r$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

Solución. – Llamemos por $\mathfrak{L}$ a las clases.

a) Obtenemos

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Suc}(\mathrm{Con}(\mathrm{Cic}_{\leq r}(\mathcal{Z})))$$

b) Obtenemos

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Con}_r(\mathrm{Cic}(\mathcal{Z} + \mathcal{Z}))$$

c) Consideremos $\mathfrak{M} = \mathrm{Con}_2(\mathcal{Z}) + \mathrm{Con}_2(\mathfrak{M})$, entonces

$$M(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}M^2(z) \Rightarrow M(z) = 1 - \sqrt{1 - z^2}$$

por lo que la clase buscada será

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Con}(\mathrm{Cic}(\mathfrak{M}))$$

■