Combinatoria Analítica

Tarea 4

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Demuestre que* $[z^{n-k}]\dfrac{1}{(1-az)^{k+1}} = a^{n-k}\binom{n}{k}$

Demostración. – Usando el binomio generalizado de newton, tenemos

$$\frac{1}{(1-az)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k-1}{n}(-az)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k-1}{n}(-a)^n z^n$$

entonces

$$\begin{aligned}
[z^{n-k}]\frac{1}{(1-az)^{k+1}} &= \binom{-k-1}{n-k}(-a)^{n-k} = \frac{(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-1-(n-k)+1)}{(n-k)!}(-1)^{n-k}a^{n-k} \\
&= \frac{(-k-1)(-k-2)\cdots(-n)}{(n-k)!}(-1)^{n-k}a^{n-k} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(n)}{(n-k)!}a^{n-k} \\
&= a^{n-k}\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

■

Problema 2. *Sea* $C = \mathrm{Suc}(\mathrm{Suc}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ *la clase de las composiciones de enteros.*

a) *Encuentre la función generadora ordinaria de la clase.*

b) *Encuentre la función generadora ordinaria bivariada* $C(z,u)$, *donde la variable* u *marca el parámetro* $\chi : C \to \mathbb{N}$ *que regresa el numero de sumandos. Estime la esperanza de* χ *en* C_n *con* $n = 5, 10, 100, 1000$.

c) *Encuentre la función generadora ordinaria bivariada* $C(z,u)$, *donde la variable* u *marca el parámetro* $\chi : C \to \mathbb{N}$ *que regresa el numero de sumandos igual a 1. Estime la esperanza de* χ *en* C_n *con* $n = 5, 10, 100, 1000$.

d) *Encuentre la función generadora ordinaria bivariada* $C(z,u)$, *donde la variable* u *marca el parámetro* $\chi : C \to \mathbb{N}$ *que regresa el numero de sumandos igual a k. Estime la esperanza de* χ *para los valores con k=1, 2, 3, 10 en* C_n *con* $n = 5, 10, 100, 1000$.

Solución. –

a) En este caso la función generadora ordinaria será

$$C(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{1-z}\right)} = \frac{1-z}{1-2z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^n$$

b) Tenemos que la clase está determinada de la siguiente manera:

$$C = \mathrm{Suc}(\mu \times \mathrm{Suc}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$$

entonces

$$C(z,u) = \frac{1}{1-\left(u \cdot \frac{z}{1-z}\right)} = \frac{1-z}{1-(1+u)z} \quad \Rightarrow \quad C(z,1) = C(z)$$

y de donde

$$\Omega(z) = \frac{\partial C(z,u)}{\partial u}\ \Big|_{u=1} = \frac{z(1-z)}{(1-2z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) 2^{n-2} z^n$$

y entonces la esperanza vendrá dada por

$$E_{C_n}(\chi) = \frac{[z^n]\Omega(z)}{[z^n]C(z)} \underset{n\geq 1}{=} \frac{(n+1)2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{n+1}{2}$$

y entonces

$$E_{C_5}(\chi) = \frac{5+1}{2} = 3, \qquad E_{C_{100}}(\chi) = \frac{100+1}{2} = 50.5$$

$$E_{C_{10}}(\chi) = \frac{10+1}{2} = 5.5, \qquad E_{C_{1000}}(\chi) = \frac{1000+1}{2} = 500.5$$

c) Tenemos que la clase está determinada de la siguiente manera:

$$C = \mathrm{Suc}(\mu \times \mathcal{Z} + \mathrm{Suc}_{\geq 2}(\mathcal{Z}))$$

entonces

$$C(z,u) = \frac{1}{1-\left(uz + \frac{z^2}{1-z}\right)} = \frac{1-z}{(1-uz)(1-z)-z^2} \quad \Rightarrow \quad C(z,1) = C(z)$$

y de donde

$$\Omega(z) = \frac{\partial C(z,u)}{\partial u}\ \Big|_{u=1} = \frac{z(1-z)^2}{(1-2z)^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2) 2^{n-3} z^n$$

y entonces la esperanza vendrá dada por

$$E_{C_n}(\chi) = \frac{[z^n]\Omega(z)}{[z^n]C(z)} = \frac{(n+2)2^{n-3}}{2^{n-1}} = \frac{n+2}{4}$$

y entonces

$$E_{C_5}(\chi) = \frac{5+2}{4} = 1.75 \qquad E_{C_{100}}(\chi) = \frac{100+2}{4} = 25.5$$

$$E_{C_{10}}(\chi) = \frac{10+2}{4} = 3, \qquad E_{C_{1000}}(\chi) = \frac{1000+2}{4} = 250.5$$

d) Tenemos que la clase está determinada de la siguiente manera:

$$C = \mathrm{Suc}(\mu \times \mathcal{Z}^k + \mathrm{Suc}_{\geq 1,\ \neq k}(\mathcal{Z}))$$

entonces

$$C_k(z,u) = \frac{1}{1 - \left(uz^k + \dfrac{z}{1-z} - z^k\right)} = \frac{1-z}{1 - 2z - (1-z)(u-1)z^k} \quad \Rightarrow \quad C(z,1) = C(z)$$

y de donde

$$\Omega(z) = \frac{\partial C(z,u)}{\partial u}\Big|_{u=1} = \frac{z^k(1-z)^2}{(1-2z)^2} = z^k\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)2^{n-2}z^n\right]$$

$$= z^k + \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)2^{n-2}z^{n+k} = z^k + \sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k+3)2^{n-k-2}z^n$$

y entonces la esperanza vendrá dada por

$$E_{C_k}(\chi) = \frac{[z^n]\Omega(z)}{[z^n]C(z)} \underset{n>k+1}{=} \frac{(n-k+3)2^{n-k-2}}{2^{n-1}} = \frac{n-k+3}{2^{k+1}}$$

y entonces

<u>Con</u> $k = 1$**:** ya lo hicimos en el inciso anterior

<u>Con</u> $k = 2$**:** $E_{C_k}(\chi) = \dfrac{n+1}{2^3}$

$$E_{C_5}(\chi) = \frac{5+1}{8} = 0.75 \qquad E_{C_{100}}(\chi) = \frac{100+1}{8} = 12.625$$

$$E_{C_{10}}(\chi) = \frac{10+1}{8} = 1.375, \qquad E_{C_{1000}}(\chi) = \frac{1000+1}{8} = 125.125$$

<u>Con</u> $k = 3$**:** $E_{C_k}(\chi) = \dfrac{n}{2^4}$

$$E_{C_5}(\chi) = \frac{5}{16} = 0.3125 \qquad E_{C_{100}}(\chi) = \frac{100}{16} = 6.25$$

$$E_{C_{10}}(\chi) = \frac{10}{16} = 0.625, \qquad E_{C_{1000}}(\chi) = \frac{1000}{16} = 62.5$$

<u>Con</u> $k = 10$**:** $E_{C_k}(\chi) = \dfrac{n-7}{2^{11}}$

$$E_{C_5}(\chi) = NA \qquad E_{C_{100}}(\chi) = \frac{100-7}{2^{11}} \approx 0.4541$$

$$E_{C_{10}}(\chi) = \frac{10-7}{2^{11}} = \frac{3}{2^{11}}, \qquad E_{C_{1000}}(\chi) = \frac{1000-7}{2^{11}} \approx 0.4848$$

$\blacksquare$

Problema 3. *Sea* $\mathfrak{T} = \mathcal{Z} \times \mathrm{Suc}(\mathfrak{T})$ *la clase de los arboles planos enraizados, el tamaño es el numero de vértices.*

a) *Encuentre la función generadora ordinaria de la clase.*

b) *Encuentre la función generadora ordinaria bivariada* $T(z,u)$, *donde la variable* u *marca el parámetro* $\chi : \mathfrak{T} \to \mathbb{N}$ *que regresa el numero de nodos con k descendientes. Estime la esperanza de* χ *en* T_n *con* $n = 5, 10, 100, 1000$.

c) *Encuentre la función generadora ordinaria bivariada* $T(z,u)$, *donde la variable* u *marca el parámetro* $\chi : \mathfrak{T} \to \mathbb{N}$ *que regresa el numero de nodos terminales. Estime la esperanza de* χ *en* T_n *con* $n = 5, 10, 100, 1000$.

Solución. –

a) En este caso la función generadora ordinaria será tal que

$$T(z) = z\frac{1}{1 - T(z)} \quad \Rightarrow \quad T(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4z}$$

$$\therefore\ T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \binom{1/2}{n} z^n$$

b) Tenemos que la clase está determinada de la siguiente manera:

$$\mathfrak{T}_k = \mathcal{Z} \times \left(\mu \times \mathfrak{T}_k^{\ k} + \mathrm{Suc}_{\neq k}(\mathfrak{T}_k)\right)$$

entonces

$$T_k(z,u) = z(uT_k(z,u)^k + \frac{1}{1 - T_k(z,u)} - T_k(z,u)^k)$$

$$\Rightarrow \quad T_k(z,u) = z(u-1)T_k(z,u)^k + \frac{z}{1 - T_k(z,u)}$$

$$\Rightarrow \quad T_k(z,u)(1 - T_k(z,u)) = z(u-1)T_k(z,u)^k(1 - T_k(z,u)) + z$$

En particular para $k = 1$ tendremos (NOTA: No vi cómo hacerlo para k en general, incluso para $k = 2$ queda un polinomio de tercer grado, y no vi forma cerrada de calcular el enésimo termino)

$$\Rightarrow \quad T(z,u)(1 - T(z,u)) = z(u-1)T(z,u)(1 - T(z,u)) + z$$

$$\Rightarrow \quad T(z,u) - T(z,u)^2 = z(u-1)(T(z,u) - T(z,u)^2) + z$$

$$\Rightarrow \quad T(z,u) - T(z,u)^2 = zuT(z,u) - zuT(z,u)^2 - zT(z,u) + zT(z,u)^2 + z$$

$$\Rightarrow \quad zuT(z,u)^2 - T(z,u)^2 - zT(z,u)^2 + T(z,u) + zT(z,u) - zuT(z,u) - z = 0$$

$$\Rightarrow \quad (zu - 1 - z)T(z,u)^2 + (1 + z - zu)T(z,u) - z = 0$$

$$\Rightarrow \quad (zu - 1 - z)T(z,u)^2 + (1 + z - zu)T(z,u) - z = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(z,u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4z}{2(u-1) - 1}}$$

y de donde

$$\Omega(z) = \frac{\partial T(z,u)}{\partial u}\ |_{u=1} = \frac{2z}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n-1}\binom{-1/2}{n-1}z^n$$

y entonces la esperanza vendrá dada por

$$E_{T_n}(\chi) = \frac{[z^n]\Omega(z)}{[z^n]T(z)} \underset{n\geq 1}{=} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}\binom{-1/2}{n-1}}{(-1)^{n+1}2^{2n-1}\binom{1/2}{n}} = \frac{\binom{-1/2}{n-1}}{\binom{1/2}{n}}$$

y entonces

$$E_{T_5}(\chi) = \frac{\binom{-1/2}{5-1}}{\binom{1/2}{5}} = 10, \qquad E_{T_{100}}(\chi) = \frac{\binom{-1/2}{100-1}}{\binom{1/2}{100}} = 200$$

$$E_{T_{10}}(\chi) = \frac{\binom{-1/2}{10-1}}{\binom{1/2}{10}} = 20, \qquad E_{T_{1000}}(\chi) = \frac{\binom{-1/2}{1000-1}}{\binom{1/2}{1000}} = 2000$$

c) Este nos comento que ya no lo hiciéramos.

Problema 4. *Sea* $\mathfrak{L} = \{A, U, C, G\}$ *el alfabeto de cuatro letras y* $\mathcal{A}^*$ *el lenguaje cuaternario.*

a) Encuentre la función generadora ordinaria bivariada $L(z,u)$*, donde la variable* u *marca el parámetro* $\chi : \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}$ *que regresa el numero de ocurrencias de la palabra* UAG*.*

b) Estime la esperanza de χ *en* A^n *con* $n = 5, 10, 100, 1000$*.*

c) Estima ahora la esperanza de χ *en* B_n*, donde* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{A}$ *es el lenguaje en donde no ocurre la palabra* GAU*, con* $n = 5, 10, 100, 1000$

Solución. –

En este problema no pudimos llegar a nada después de unos días intentándolo. Entre yo y mi hermano a lo mas que pudimos llegar es a la función generadora

$$M(z) = -\frac{1}{1-4z} + \frac{1}{(-z)^3 \cdot u + (1-4z)} + \frac{1}{z^3 + (1-4z)}$$

sin embargo, esta cuenta de mas algunas cosas y otras no. Es lo mas cercano a lo que llegamos, pues tratamos de trabajar con la especificación de S el lenguaje de las palabras que no tienen a UAG como factor, pero tampoco llegamos a nada.

```
h1[z_] := -1/(1 - 4*z) + 1/((-z)^3*u + (1 - 4 z)) + 1/(z^3 + (1 - 4 z));
Series[h1[z], {z, 0, 9}]
serie
1 + 4 z + 16 z^2 + (63 + u) z^3 + (248 + 8 u) z^4 + (976 + 48 u) z^5 +
  (3841 + 256 u + u^2) z^6 + (15 116 + 1280 u + 12 u^2) z^7 +
  (59 488 + 6144 u + 96 u^2) z^8 + (234 111 + 28 672 u + 640 u^2 + u^3) z^9 + O[z]^10
```