Análisis Complejo

Examen I

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Sea* $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *y* $G_h = \{(t,h(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ *su grafica. Se* D *un domino y* $f \in \mathrm{Hol}(D)$ *tal que la imagen* $f(D)$ *está contenida en la gráfica de* h*. demostrar que* f *es constante.*

Demostración. – Consideremos $f = u + iv$. Por hipótesis tendremos que para cada $x + iy \in \mathbb{C}$, $f(x+iy) \in G_h$ por lo que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv = t + ih(t)$, de donde entonces $f = u + ih(u)$. Pero, por otro lado, dado que f es holomorfa se cumplirán las ecuaciones de C-R, siendo

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v = \partial_y h(u) = h'(u)\partial_y u \\ \partial_y u = -\partial_x v = -\partial_x h(u) = -h'(u)\partial_x u \end{cases}$$

donde las respectivas derivadas existen por la regla de la cadena, ya que $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $u, v \in \mathrm{Har}(D,\mathbb{R})$. Sustituyendo la segunda en la primera obtenemos

$$\partial_x u = h'(u)\partial_y u = h'(u)\left(-h'(u)\partial_y u\right) = -(h'(u))^2\partial_y u$$
$$\Leftrightarrow \quad \partial_x u + (h'(u))^2\partial_y u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_x u\left[1 + (h'(u))^2\right] = 0$$

pero $1 + (h'(u))^2 > 0$, por lo que necesariamente $\partial_x u = 0$, por lo tanto, f es constante.

■

Problema 2. *Sea* $b \in \mathbb{C}$, *definimos* $f_b : \mathbb{C} \setminus l_{-\pi} \to \mathbb{C}^*$ *como*

$$f_b(z) = z^b := \exp(b\log(z))$$

con el logaritmo principal.

(*i*) *Explique porque esta función está bien definida y es holomorfa en* $\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$, *y pruebe que*

$$\frac{d}{dz} z^b = bz^{b-1}$$

(*ii*) *Para el caso* $b = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *¿Hacia dónde mapea* $z^{\frac{1}{n}}$ *el dominio* $\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$*?*

Demostración. – Sea $b \in \mathbb{C}$ arbitrario pero fijo.

(*i*) Sean $h : \mathbb{C} \setminus l_{-\pi} \to \mathbb{C}^*$ y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ dadas por $h(z) = b\log(z)$ y $g(z) = \exp(z)$ funciones bien definidas, entonces notemos que la función $g \circ h : \mathbb{C} \setminus l_{-\pi} \to \mathbb{C}^*$ está bien definida[ℵ] como composición y además $(g \circ h)(z) = f_b(z)$, por lo que la función f_b está bien definida.

Ahora, sabemos que $h(z)$ es una función holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$ y además la función $g(z)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$, por lo tanto por la regla de la cadena la función $f_b = g \circ h$ es holomorfa en $\left(\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}\right) \cap \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$, y además para $z \in \mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$

$$f_b'(z) = g'(h(z))h'(z) = \exp(b\log(z)) \cdot b\frac{1}{z} := z^b b\frac{1}{z} = bz^{b-1}$$

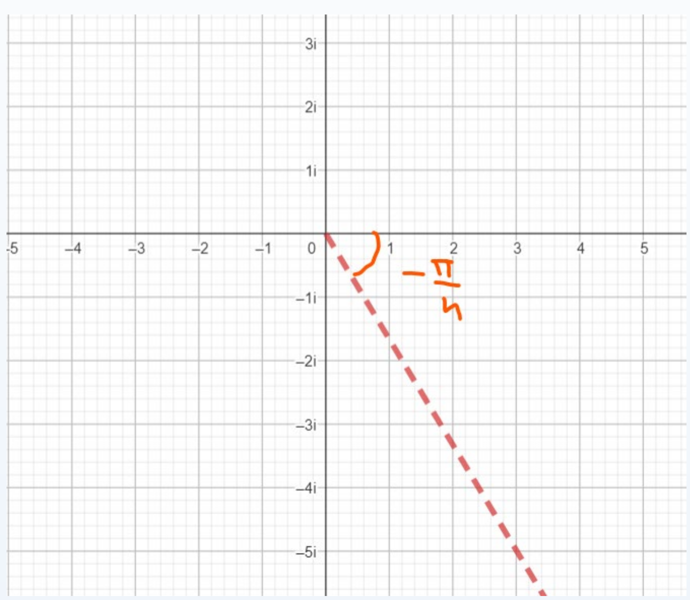
(ii) Tenemos por definición que

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{n}}[\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}] &= \left\{f_{\frac{1}{n}}(z) : z \in \mathbb{C} \setminus l_{-\pi}\right\} = \left\{z^{1/n} : \arg(z) \neq -\pi\right\} = \left\{z^{1/n} : \arg(z) = -\pi\right\}^{\mathrm{C}} \\ &= \left\{t^{1/n} : t < 0\right\}^{\mathrm{C}} = \left\{\exp(\frac{1}{n}\log(t)) : t < 0\right\}^{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

y dado que $t < 0$, $\log(t) = \ln|t| + i\,\mathrm{Arg}(t) = \ln(-t) - i\pi$, entonces

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{n}}[\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}] &= \left\{\exp(\frac{1}{n}\ln(-t) - \frac{1}{n}i\pi) : t < 0\right\}^{\mathrm{C}} = \left\{\exp(\frac{1}{n}\ln(-t))\exp(-\frac{1}{n}i\pi) : t < 0\right\}^{\mathrm{C}} \\ &= \left\{\sqrt[n]{-t} \cdot e^{-i\pi/n} : t < 0\right\}^{\mathrm{C}} = \left\{\sqrt[n]{r} \cdot e^{-i\pi/n} : r > 0\right\}^{\mathrm{C}} = \left\{R \cdot e^{-i\pi/n} : R > 0\right\}^{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

por lo tanto, la imagen nos dará todo el plano complejo, excepto el rayo que parte del origen con ángulo $-\frac{\pi}{n}$, como en la figura:



ℵ Ya que $\mathrm{Img}(h) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$

Problema 3. *Sea D un disco o todo el plano complejo.*

(*i*) *Si $u, v \in \text{Har}(D, \mathbb{R})$ y v es armónica conjugada de u, pruebe que $\nabla v = R_{90^\circ}(\nabla u)$. En particular, $\nabla u \perp \nabla v$.*

(*ii*) *Dibuje algunas curvas de nivel para la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ ¿Qué observa?*

Demostración. –

(*i*) Dado que por hip v es armónica conjugada de u tenemos que

$$\partial_x u = \partial_y v \ \text{ y } \ \partial_y u = -\partial_x v$$

por lo que, usando estas igualdades,

$$\nabla v = (\partial_x v, \partial_y v) = (-\partial_y u, \partial_x u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} = R_{90^\circ}(\nabla u)$$

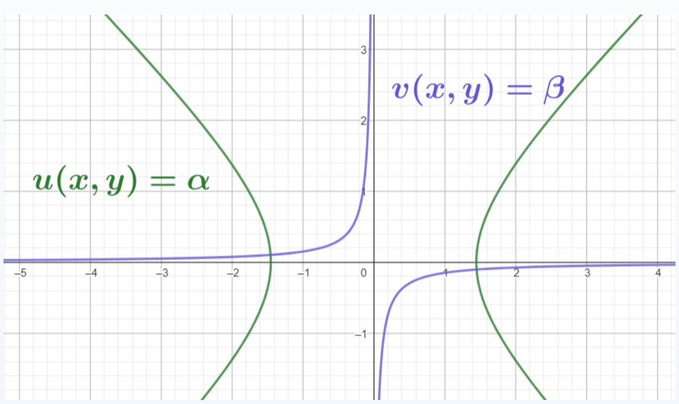
(*ii*) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Primeramente, la función f tiene la forma cartesiana

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i(2xy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

de donde,

⊙ $u(x, y) = \alpha \Rightarrow x^2 - y^2 = \alpha$ la cual es la ecuación de la hipérbola con centro en el origen con orientada en forma horizontal o vertical si $\alpha < 0$ o $\alpha > 0$ respectivamente.

⊙ $v(x, y) = \beta \Rightarrow 2xy = \beta$ la cual es la ecuación de una parábola rotada por 45º con centro en el origen, y dada la figura



notamos que se intersecan en ángulos rectos, justo pues la función $f(z) = z^2$ es holomorfa y por ende las funciones u, v son armónicas conjugadas.

∎

Problema 4. *Sea D un disco o todo el plano complejo. Dada una función armónica u en D, demostrar que existen funciones f y g, holomorfa y anti-holomorfa en D, tales que $u = f + g$*

Demostración. – Dado que u es armónica, sabemos que existe una única conjugada armónica de u, digamos v, tal que la función $h = u + iv$ es holomorfa. Con ello consideremos a las funciones $f = \frac{1}{2}h$ y $g = \frac{1}{2}\overline{h}$. Dado que h es holomorfa tendremos que $\overline{h}$ es anti-holomorfa, y por tanto las funciones f y g son holomorfa y anti-holomorfa respectivamente y tales que

$$f + g = \tfrac{1}{2}(u + iv) + \tfrac{1}{2}(u - iv) = u$$

■

Problema 5. *Sean $p > 1$, G un dominio y $f \in \mathrm{Hol}(G) \cap C^2(G, \mathbb{C})$ tal que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in G$. Demostrar que*

$$\Delta(|f|^p) = p^2 |f|^{p-2} |f'|^2$$

En particular, $\Delta(|f|^p) \geq 0$.

Demostración. – Dadas las hipótesis tenemos que $f \neq 0$ y $|f| > 0$, por lo que la composición

$$|f|^p = \exp(p \log(|f|))$$

está bien definida, de donde por el problema 2,

$$\begin{aligned}
\Delta(|f|^p) &= 4\partial_{\overline{z}}\partial_z(|f|^p) = 4\partial_{\overline{z}}(p|f|^{p-1} \cdot \partial_z |f|) = 4\partial_{\overline{z}}(p|f|^{p-1} \cdot \frac{\overline{f}}{2|f|}\partial_z f) \\
&= 2p\partial_{\overline{z}}(|f|^{p-2} \cdot \overline{f} \cdot \partial_z f) \\
&= 2p\Big[\partial_{\overline{z}}(|f|^{p-2}) \cdot \overline{f} \cdot \partial_z f + |f|^{p-2} \cdot \partial_{\overline{z}}(\overline{f}) \cdot \partial_z f + |f|^{p-2} \cdot \overline{f} \cdot \partial_{\overline{z}}(\partial_z f)\Big]
\end{aligned}$$

Pero como f es holomorfa de clase C^2, será armónica por lo que $\partial_{\overline{z}}(\partial_z f) = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\Delta(|f|^p) &= 2p\Big[\partial_{\overline{z}}(|f|^{p-2}) \cdot \overline{f} \cdot \partial_z f + |f|^{p-2} \cdot \overline{\partial_z f} \cdot \partial_z f\Big] \\
&= 2p\Big[(p-2)|f|^{p-3}\, \partial_{\overline{z}} |f| \cdot \overline{f} \cdot \partial_z f + |f|^{p-2} \cdot |\partial_z f|^2\Big] \\
&= 2p\left[(p-2)|f|^{p-3}\, \frac{f}{2|f|}\partial_{\overline{z}}\overline{f} \cdot \overline{f} \cdot \partial_z f + |f|^{p-2} \cdot |\partial_z f|^2\right] \\
&= 2p\left[\frac{1}{2}(p-2)|f|^{p-4}\, f \cdot \partial_{\overline{z}}\overline{f} \cdot \overline{f} \cdot \partial_z f + |f|^{p-2} \cdot |\partial_z f|^2\right] \\
&= 2p\left[\frac{1}{2}(p-2)|f|^{p-4}\, |f|^2 \,|\partial_z f|^2 + |f|^{p-2} \cdot |\partial_z f|^2\right]
\end{aligned}$$

$$= 2p\left[\frac{1}{2}(p-2)+1\right]|f|^{p-2}\left|\partial_z f\right|^2 = \left[p(p-2)+2p\right]|f|^{p-2}\left|\partial_z f\right|^2$$
$$= p^2\,|f|^{p-2}\left|\partial_z f\right|^2 = p^2\,|f|^{p-2}\left|f'\right|^2$$

■

Problema 6. *Dados $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}_0$, el símbolo de Pochhammer (descendiente) se define como*

$$(\alpha)_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Calcule el radio de convergencia de la serie binomial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k$$

¿Cómo se ven los coeficientes cuando $\alpha = -1$? ¿Que función crees que define esta serie?

Demostración. – Sea $a_k = \frac{(\alpha)_k}{k!}$, entonces dado que $\alpha \notin \mathbb{N}$, tendremos que $a_k \neq 0$ por lo que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\alpha)_{k+1}/(k+1)!}{(\alpha)_k/k!}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\alpha)_{k+1}k!}{(\alpha)_k(k+1)!}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\frac{(\alpha)_{k+1}}{(\alpha)_k}\right|$$
$$\underset{k>1}{=} \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \lim_{k\to\infty}|-1| = 1$$

por tanto, dado que el limite existe, el radio de convergencia será $R = 1$.

Ahora, cuando $\alpha = -1$, tendremos que

$$\frac{(-1)_k}{k!} = \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k$$

por lo que la serie nos queda, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}$ usando la serie geométrica.

■

Problema 7. *Encontrar todas las soluciones de la ecuación* $\exp(e^z) = 1$

Demostración. – Usando el hecho de que la exponencial no es inyectiva obtendremos infinitas soluciones de la siguiente manera;

$$\exp(e^z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = \log(1) + 2\pi ik, \; k \in \mathbb{Z}$$

donde $\log(1)$ es el valor principal del logaritmo, siendo $\log(1) = \ln|1| + i\,\mathrm{Arg}(1) = 0 + i \cdot 0 = 0$, por lo que

$$e^z = 2\pi ik \quad \Leftrightarrow \quad z = \log(2\pi ik) + 2\pi iq, \; q \in \mathbb{Z}$$

de donde $\log(2\pi ik) = \ln|2\pi ik| + i\,\mathrm{Arg}(2\pi ik)$, obteniendo pues

$$\begin{aligned} z_{k,q} &= \begin{cases} \ln(2\pi k) + i(2\pi q + \frac{\pi}{2}) & \text{si } k > 0 \\ \ln(-2\pi k) + i(2\pi q - \pi) & \text{si } k < 0 \end{cases} \text{ con } q \in \mathbb{Z} \\ &= \begin{cases} \ln(2\pi k) + i(2\pi q + \frac{\pi}{2}) \\ \ln(2\pi k) + i(2\pi q - \pi) \end{cases} \text{ con } k, q \in \mathbb{Z}, \; k > 0 \end{aligned}$$

■

Problema 8. *Sea* f *analítica en todo el plano, y* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión inyectiva y acotada de números reales. Si* $f(x_k) \in \mathbb{R}$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$, *demostrar que* $f(z)$ *es real para toda* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración. – Primeramente, por el teorema de Bolzano-Weierstrass dado que $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ es acotada, tendrá una subsucesión convergente, digamos $\left\{x_{k_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$, y además esta será no constante, pues la sucesión es inyectiva. Mas aun, dado que f es analítica, será holomorfa y por ende continua de tal manera que si $x_{k_n} \to x \Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x)$, donde por hipótesis $\left\{f(x_{k_n})\right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y dado que $\mathbb{R}$ es cerrado tendremos que ambos limites convergen a puntos en $\mathbb{R}$, es decir, $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) \in \mathbb{R}$

Con ello tendremos que $f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. En efecto, como f es analítica sabemos que será infinitamente complejo diferenciable, por lo que $f^{(n)}$ es una función continua, de donde entonces por el mismo argumento $f^{(n)}(x_{k_n}) \to f^{(n)}(x)$, con ello será suficiente probar que $\left\{f^{(n)}(x_{k_m})\right\}_{m=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Probando mediante inducción, el caso base fue hecho al inicio, por lo que supongamos que se cumple para alguna $n > 0$, entonces dado que f es analítica tendremos que $f^{(n)}$ es analítica, por lo que existe su serie alrededor del cero, siendo

$$f^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$

pero dado que por hip de inducción $f^{(n)}(x_{k_m}) \in \mathbb{R}$, tendremos que

$$f^{(n)}(x_{k_n}) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x_{k_n})^j \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad b_j \in \mathbb{R}\ \forall j$$

de esta forma, dada la diferenciabilidad de las series analíticas,

$$f^{(n+1)}(x_{k_n}) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot b_j (x_{k_n})^j$$

y como j, b_j y $x_{k_m} \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(n+1)}(x_{k_m}) \in \mathbb{R}$, concluyendo que $\left\{f^{(n)}(x_{k_m})\right\}_{m=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

Para concluir, dado que f es analítica existe una representación de la función como serie de potencias alrededor de x, siendo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - x)^n$$

donde $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ los cuales son todos valores reales por lo probado en el párrafo anterior, por lo que si consideramos $z \in \mathbb{R}$ tendremos una serie de potencias reales, por lo tanto f será real en estos valores.

■