Análisis Complejo

Examen I

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Evaluar las siguientes integrales de contorno:*

(i) $\displaystyle\int_{|z-i|=3} e^{\sin(z)}dz$

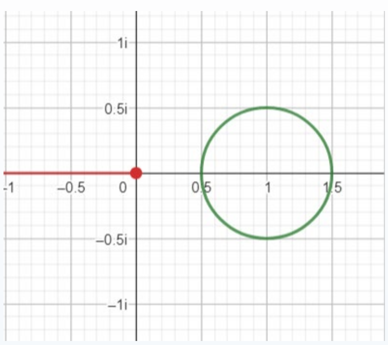
(ii) $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z)}{(z-1)^n}\,dz$

Demostración. –

(i) Notemos que por la regla de la cadena la función $f(z) = \exp(\sin(z))$ es entera, por tanto, haciendo uso del teorema de Cauchy sabemos que la integral será 0.

(ii) Notemos que el corte de rama del logaritmo no toca a nuestra curva, por tanto, tendremos que la función $f(z) = \log z$ será holomorfa dentro y sobre la curva, entonces por la Formula Integral de Cauchy tendremos:

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z)}{(z-1)^n}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(1)$$



de donde $f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1}(k-1)!\dfrac{1}{z^k}$, $k \geq 1$, por lo que

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z)}{(z-1)^n}\,dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!}\log(1) & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n-2}(n-2)!\dfrac{1}{(1)^{n-1}} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z)}{(z-1)^n}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{(-1)^n 2\pi i}{n-1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

■

Problema 2. *Suponga que f es una función entera para la cual existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| < Me^{|z|},\ \forall z \in \mathbb{C}$$

Demostrar que $|f(0)| < M$ y

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < M\left(\frac{e}{n}\right)^n,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. – Por hipótesis tenemos que de forma directa que para $z = 0$

$$\left|f(0)\right| < Me^{|0|} = M \quad \therefore \quad \left|f(0)\right| < M$$

ahora consideremos $n \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario, entonces de la Formula Integral de Cauchy

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{B(0,n)} \frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}}\,dz = \frac{n!}{2\pi i}\int_{B(0,n)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

de donde

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(0)\right| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{B(0,n)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{B(0,n)} \frac{\left|f(z)\right|}{|z|^{n+1}}|dz| \underset{z\in B(0,n)}{\leq} \frac{n!}{2\pi}\int_{B(0,n)} \frac{Me^{|z|}}{n^{n+1}}|dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{n^{n+1}}\int_{B(0,n)} e^{|z|}|dz| = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{n^{n+1}}\int_0^{2\pi} e^{\left|ne^{it}\right|}\left|nie^{it}\right|dt = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{n^{n+1}}\int_0^{2\pi} e^n n\,dt \\ &= \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{n^{n+1}}e^n n 2\pi = n!\frac{M}{n^n}e^n = n!M\left(\frac{e}{n}\right)^n\end{aligned}$$

y la prueba concluye despejando lo querido

■

Problema 3. *Sea D un dominio simplemente conexo y $f, g \in \mathrm{Hol}(D)$. Suponga que g es 1 a 1 en D y que $g'(z) \neq 0$ para toda $z \in D$. Demostrar que para cualquier curva cerrada γ contenida en D se cumple*

$$f(z) = I_\gamma(z)g'(z)\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}\,d\zeta$$

para cualquier punto $z \in D \setminus \gamma^*$.

Demostración. – Consideremos la función

$$h(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)(\zeta - z)}{g(\zeta)-g(z)} & \text{si } \zeta \neq z \\ \dfrac{f(z)}{g'(z)} & \text{si } \zeta = z \end{cases}$$

y probaremos que es holomorfa. Notemos que dado que g es inyectiva tendremos $g(\zeta) - g(z) \neq 0$ para $\zeta \neq z$ y dado que f es holomorfa tenemos que para $\zeta \neq z$ la función es holomorfa, y como $g'(z) \neq 0$ la función está bien definida. Además

$$\lim_{\zeta\to z} h(\zeta) = \lim_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta)(\zeta-z)}{g(\zeta)-g(z)} = \lim_{\zeta\to z} f(\zeta)\left[\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta - z}\right]^{-1} = \frac{f(z)}{g'(z)}$$

Esto ultimo pues g es holomorfa. Así tendremos que la función h es continua en D y holomorfa en $D \setminus \{z\}$, por tanto, por el teorema de Morera es holomorfa en D. Asi entonces dada la Formula Integral de Cauchy (considerando γ curva cerrada contenida en D)

$$h(z)I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{g(\zeta) - g(z)}d\zeta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(z)}{g'(z)}I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{g(\zeta) - g(z)}d\zeta \quad \Rightarrow \quad f(z)I_\gamma(z) = \frac{g'(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{g(\zeta) - g(z)}d\zeta$$

NOTA: Hasta esta igualdad llegue, no sé si es que el problema estaba mal redactado o hay algo que no estoy notando para llegar al resultado del enunciado.

Problema 4. *Sea* Ω *un abierto y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ *sucesión tal que converge uniformemente a una función* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *en cada subconjunto compacto de* Ω. *Demostrar que* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$.

Demostración. – Sea $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada C^1 a trozos, entonces como $f_n \to f$ uniformemente tendremos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

lo cual esta bien definido pues al ser f_n analíticas y $f_n \to f$ uniformemente, entonces f también es continua y la integral existe. Ahora, como f_n es analítica en $\operatorname{int}\gamma$ entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

por tanto, como la curva fue arbitraria tendremos que la función f es analítica en $\operatorname{int}\gamma$, para cada $\gamma \subset \Omega$, entonces lo será en cada punto de Ω.

■

Problema 5. *Denotemos por* $\mathbb{D} = B(0,1)$. *Demostrar el lema de Schwarz. Sea* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *tal que* $f(0) = 0$ *y* $|f(z)| \leq 1$ *para toda* $z \in \mathbb{D}$. *Entonces*

(a) $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in \mathbb{D}$

(b) $|f'(0)| \leq 1$

Además, si en alguno de los incisos se da la igualdad, entonces $f = e^{i\theta}I$ *con I la función identidad.*

Demostración. – Consideremos la función

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Y demostraremos que esta función es holomorfa en $\mathbb{D}$. En efecto, dado que f es holomorfa esta será analítica y por tanto por el teorema de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \underset{f(0)=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

para un cierto radio de convergencia. Con ello

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-1}$$

pues para $z \neq 0$ coinciden y además $g(0) = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(0)^{n-1} = f'(0)$ coincidiendo ambas expresiones para toda z, Entonces g es analítica y por tanto holomorfa. Así dado un subdisco cerrado $C \subset \mathbb{D}$ tendremos por el principio del módulo máximo que existe $z_0 \in \partial C$ tal que $|g(z_0)| \leq |z_0| \leq 1$ y como es para cada subdisco cerrado, entonces será valido para cada valor en el disco, es decir $|g(z)| \leq 1$ de donde tomando $z = 0$ obtenemos que $|f'(0)| \leq 1$ y además para toda z, $|f(z)| \leq |z|$.

Por otro lado, si pasara que $|f(z)| = |z| \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \Rightarrow \frac{f(z)}{z} = e^{i\theta} \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} z$, que es lo buscado.

■

Problema 6. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa con $f(0) = 0$. Demostrar que la serie*

$$F(z) := \sum_{k=1}^{\infty} f(z^k), \quad z \in \mathbb{D}$$

define una función holomorfa y que $F(z) \leq \frac{r}{1-r}$ para $|z| \leq r < 1$.

Demostración. – Por la definición de f esta función será holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$ y además $|f(z)| \leq 1$. Entonces por el Lema de Schwarz tendremos $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in \mathbb{D}$.

Así sea $\Omega \subset \mathbb{D}$ compacto, y sea $z \in \Omega$ entonces por lo anterior

- $|f(z^k)| \leq |z^k| = |z|^k$ y como Ω es compacto y la función modulo continua, tendremos que alcanzara su máximo, digamos $r > 0$ con $r < 1$ pues $\Omega \subset \mathbb{D}$, es decir,

$$|f(z^k)| \leq r^k \quad \forall z \in \Omega$$

- Tendremos que $\sum_{k=1}^{\infty} r^k < \infty$, pues es serie geométrica con $r < 1$.

Entonces con los dos anteriores por el Criterio M de Weiestrass la serie converge uniformemente en Ω y por tanto converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, es decir, si definimos

$$F_n(z) := \sum_{k=1}^{n} f(z^k), \quad z \in \mathbb{D}$$

entonces dicha sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente a la función F en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, por ende, por el problema 4 esta será una función Holomorfa. Además

$$\left|F(z)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|f(z^k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}$$

■