Análisis Complejo

Examen III

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Sea D un dominio y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Hol}(D)$ *tal que* $f_n \to f$ *normalmente en D, con* f *no constante.*
Si γ *es curva cerrada simple en D que no pasa por los ceros de f, demostrar que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para toda* $n \geq N$ *,* f_n y f *tienen el mismo numero de ceros en el interior de* γ *.*

Demostración. – Sea $\Omega = \overline{\mathrm{int}\,\gamma}$ el cual es un compacto por hipótesis. Entonces tenemos las siguientes:

- Como $f_n \to f$ normalmente en D y cada $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Hol}(D)$ entonces $f \in \mathrm{Hol}(D)$.
- Dado que $f_n \to f$ normalmente en D entonces $f_n \to f$ uniformemente en Ω, por lo que para cualquier $\varepsilon > 0$ existirá $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > \tilde{N}$, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, para toda $z \in \Omega$.

Encontremos la épsilon adecuada. Como sabemos que $f \in \mathrm{Hol}(D)$, en particular lo sera en Ω y dado que sabemos que $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \gamma$ tendremos por el principio del módulo mínimo que $|f|$ alcanza su mínimo en γ, digamos $z_0 \in \gamma$ con $|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0 \ \forall z \in \Omega$, y este es el valor buscado.

Consideremos $\varepsilon = |f(z_0)|$ y entonces por la definicion de convergencia uniforme existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $|f_n(z) - f(z)| < |f(z_0)|$, para toda $z \in \Omega$, pero $|f(z_0)| \leq |f(z)|$, por lo tanto para $n > N$, tenemos dos funciones holomorfas en un dominio de jordan tales que

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$$

entonces por el teorema de Rouché, f y f_n tienen el mismo numero de ceros.

$\blacksquare$

Problema 2. *Sea* $a \in \mathbb{C}$ *,* $r > 0$ *y* $f \in \mathrm{Hol}(B(a,r) \setminus \{a\})$ *. Demostrar que si*

$$\iint_{B(a,r)} \left|f(z)\right|^2 dz < \infty$$

entonces la singularidad en a *es removible.*

Demostración. – Notemos que sin perdida de generalidad podemos considerar $a = 0$, pues será un caso particular de este si consideramos $g(z) = f(a-z)$.

Dado que $f \in \mathrm{Hol}(B(0,r) \setminus \{0\})$, tendremos que existirá su serie de Laurent alrededor de $z = 0$, a saber

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

la cual convergerá uniformemente para cualquier sub anillo cerrado. Con ello consideremos el anillo $A_\varepsilon^\rho(0)$ con $0 < \varepsilon < \rho < r$, entonces notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} \left|f(z)\right|^2 dz &= \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} f(z)\overline{f(z)} dz = \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n}\,\overline{z}^n\right] dz \\ &= \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k+m=n} a_k z^k \overline{a_m}\,\overline{z}^m\right) dz \end{aligned}$$

y dada la convergencia uniforme

$$\begin{aligned} \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} \left|f(z)\right|^2 dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} \sum_{k+m=n} a_k z^k \overline{a_m}\,\overline{z}^m dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+m=n} \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} a_k z^k \overline{a_m}\,\overline{z}^m dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+m=n} \int_\varepsilon^\rho \int_0^{2\pi} a_k (te^{i\theta})^k \overline{a_m}\,\overline{(te^{i\theta})}^m\, t dt d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+m=n} \int_\varepsilon^\rho \int_0^{2\pi} a_k t^k e^{ik\theta} \overline{a_m} t^m e^{-i\theta m} t dt d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+m=n} a_k \overline{a_m} \int_\varepsilon^\rho \int_0^{2\pi} t^{k+m+1} e^{i\theta(k-m)} dt d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+m=n} a_k \overline{a_m} \left(\int_\varepsilon^\rho t^{k+m+1} dt\right)\left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-m)} d\theta\right) \end{aligned}$$

pero sabemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-m)} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

por lo que

$$\iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} |f(z)|^2 \, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+m=2n} a_k \overline{a_m} \left(\int_\varepsilon^\rho t^{k+m+1} dt \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-m)} d\theta \right)$$

$$\underset{k=m \;\Rightarrow\; k=n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{a_n} \left(\int_\varepsilon^\rho t^{n+n+1} dt \right) 2\pi$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \left(\int_\varepsilon^\rho t^{2n+1} dt \right)$$

ahora, notemos que del lado izquierdo cuando $\varepsilon \to 0^+$ y $\rho \to r^-$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \rho \to r^-}} \iint_{A_\varepsilon^\rho(0)} |f(z)|^2 \, dz = \iint_{B(0,r)} |f(z)|^2 \, dz < \infty$$

por hipótesis, y por el lado derecho

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \rho \to r^-}} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \left(\int_\varepsilon^\rho t^{2n+1} dt \right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \left(\int_0^r t^{2n+1} dt \right)$$

pero una condición necesaria para que este lado sea finito es que $\int_0^r t^{2n+1} dt < \infty$ y esto pasa si y solo si $n \geq 0$, por lo que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

por lo que la serie de Laurent de f en $z = 0$ no tiene parte singular, entonces la singularidad en $z = 0$ es removible.

$\blacksquare$

Problema 3. *Encontrar un mapa conforme que transforme la región*

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} z < \pi\} \text{ en } D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

Demostración. – Consideremos $f(z) = \frac{1}{2} iz$, entonces

$$f[D_1] = \{f(z) : z \in D_1\} = \left\{\tfrac{1}{2} iz : -\pi < \operatorname{Re} z < \pi\right\} = \left\{\tfrac{1}{2} i(x+iy) : -\pi < x < \pi, y \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\tfrac{1}{2} ix - \tfrac{1}{2} y : -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : -\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{Im}(z) < \tfrac{1}{2}\pi\right\} := A$$

Y si consideramos $g(z) = e^z$, entonces

$$g[A] = \left\{e^x e^{iy} : -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi, x \in \mathbb{R}\right\}$$

que es el semiplano derecho, ya que el modulo es cualquier numero real y el argumento esta entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Para finalizar únicamente necesitamos reflejar el conjunto por un ángulo de 90º, siendo esta la transformación $h(z) = iz$, por lo tanto, dado que todas las funciones mencionadas son enteras, tendremos que el mapeo buscado será

$$h(g(f(z))) = ie^{\frac{1}{2} iz}$$

■

Problema 4. *Sean g y h holomorfas en una vecindad de $z = a$. Suponga que $g(a) \neq 0$ y que h tiene un cero de multiplicidad 2 en a. Demostrar que $\frac{g}{h}$ tiene un polo doble en a y que*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, a\right) = 2\frac{g'(a)}{h''(a)} - \frac{2}{3}\frac{g(a)h'''(a)}{|h''(a)|^2}$$

Demostración. – Dado que h es holomorfa y tiene un cero de multiplicidad 2 en a sabemos que existirá $\tilde{h}$ holomorfa y distinta de cero en una vecindad de a tal que $h(z) = (z-a)^2 \tilde{h}(z)$, así dado que $g(a) \neq 0$ también en una vecindad de a, tendremos que la función

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{(z-a)^2 \tilde{h}(z)} = \frac{g(z)/\tilde{h}(z)}{(z-a)^2}$$

tiene un polo de orden 2 en a. Entonces la serie de Laurent de g/h en $A_0^r(a)$ para algún $r > 0$ se vera de la forma

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

Como h es holomorfa en a y tiene cero de orden 2 en a, su serie de Taylor se vera de la forma

$$h(z) = \frac{h''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{h'''(a)}{3!}(z-a)^3 + (z-a)^4 L(z)$$

por lo que despejando

$$\begin{aligned} g(z) &= \left[\frac{h''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{h'''(a)}{3!}(z-a)^3 + (z-a)^4 L(z)\right]\left[\frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{h''(a)}{2!}a_{-2} + \frac{h''(a)}{2!}a_{-1}(z-a) + \frac{h'''(a)}{2!}a_{-2}(z-a) + (z-a)^2 L_1(z) \\ &= \frac{h''(a)}{2!}a_{-2} + \left[\frac{h''(a)}{2!}a_{-1} + \frac{h'''(a)}{2!}a_{-2}\right](z-a) + (z-a)^2 L_1(z) \end{aligned}$$

pero sabemos que la serie de Taylor de g en $z = a$ es

$$g(z) = g(a) + g'(a)(z-a) + (z-a)^2 L_2(z)$$

y como esta es única, necesariamente

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{h''(a)}{2!}a_{-2} \quad \Rightarrow \quad a_{-2} = 2\frac{g(a)}{h''(a)} \\ g'(a) &= \frac{h''(a)}{2!}a_{-1} + \frac{h'''(a)}{2!}a_{-2} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 2\frac{g'(a)}{h''(a)} - \frac{2}{3}\frac{g(a)h'''(a)}{\left|h''(a)\right|^2} \end{aligned}$$

que es justo lo buscado. ■

Problema 5. *Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, si es meromorfa en $\mathbb{C}$ y si el límite $\lim_{|z|\to\infty} \left|f(z)\right|$, o bien existe, o bien es infinito. Demostrar que toda función meromorfa es racional.*

Demostración. – Por hipótesis sabemos que $z = \infty$ será o una singularidad removible, o un polo para f, por lo que es aislada, de tal forma que existirá $r > 0$ talque f será analítica en $B(\infty, r)$, que no es mas que el complemento del disco $\overline{B(0,r)}$. Ahora, consideremos L al conjunto de polos de la función f. Dado lo anterior y que f es meromorfa, tendremos que $L \subseteq \overline{B(\infty, r)}$.

Ahora, veamos que necesariamente el numero de polos y ceros en $\hat{\mathbb{C}}$ de f tiene que ser finito. Supongamos por contradicción que el numero de polos es infinito, entonces como $\overline{B(\infty,r)}$ es compacto, tiene que existir un punto de acumulación y llamémosle z_0 a este punto. Entonces dado que es punto de acumulación tendremos para cada $\varepsilon > 0$, $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \cap L \neq \varnothing$, por lo que el conjunto $B(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$ contiene polos de f para toda $\varepsilon > 0$!!! Pero esto no es posible, pues nos diría que el polo z_0 seria una singularidad no aislada, contradiciendo que f es meromorfa. Entonces necesariamente L es un conjunto finito. De forma similar los ceros de f deben ser finitos.

Con ello llamémosle $a_1, a_2, ..., a_n$ y $m_1, m_2, .., m_n$ a los polos de f y sus ordenes respectivamente y consideremos la función

$$g(z) = f(z)(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n}$$

la cual será una función entera, y además $\lim_{|z| \to \infty} |g(z)| = \infty$ pues $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)|$ existe o es infinito. Entonces por el problema 6 de la tarea 5 tendremos que la función g es un polinomio, digamos

$$g(z) = p(z) \ \Rightarrow f(z) = \frac{p(z)}{(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n}}$$

es decir, es una función racional.

$\blacksquare$

Problema 6 (extra). *Sea* $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{D}, \mathbb{R}) \cap C^2(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R})$. *Demostrar la fórmula de Poison: Para* $a \in \mathbb{D}$ *se cumple*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{i\theta}|^2} d\theta$$

Demostración. – Consideremos la función $u \circ S_a$, donde $S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Dicha función esta bien definida pues por lo visto en clase $S_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Veamos que es armónica, tenemos

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z (u \circ S_a) = \partial_{\bar{z}} \left((\partial_z u \circ S_a) \partial_z S_a + (\partial_{\bar{z}} u \circ S_a) \partial_z \overline{S_a} \right)$$

Pero como S_a es holomorfa, entonces $\partial_z \overline{S_a} = 0$, así

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z (u \circ S_a) = \partial_{\bar{z}} \left((\partial_z u \circ S_a) \partial_z S_a \right) = \partial_{\bar{z}} (\partial_z u \circ S_a) \cdot \partial_z S_a + (\partial_z u \circ S_a) \cdot \partial_{\bar{z}} \partial_z S_a$$

y nuevamente como S_a es holomorfa entonces $\partial_z S_a$ también y por ende $\partial_{\bar{z}} \partial_z S_a = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_{\bar{z}} \partial_z (u \circ S_a) &= \partial_{\bar{z}} (\partial_z u \circ S_a) \cdot \partial_z S_a \\ &= \left[(\partial_z \partial_z u \circ S_a) \partial_{\bar{z}} S_a + (\partial_{\bar{z}} \partial_z u \circ S_a) \partial_{\bar{z}} \overline{S_a} \right] \cdot \partial_z S_a \end{aligned}$$

pero $\partial_{\bar{z}} S_a = 0$ y por ser u armónica $\partial_{\bar{z}} \partial_z u = 0$, entonces

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z (u \circ S_a) = \left[(\partial_z \partial_z u \circ S_a) \cdot 0 + (0 \circ S_a) \partial_{\bar{z}} \overline{S_a} \right] \cdot \partial_z S_a = 0$$

por lo que $u \circ S_a$ es harmónica. Ahora, como es una función harmónica tendremos que cumplirá la propiedad del valor medio, a saber para cada $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{D}$

$$u(S_a(z_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(S_a(z_0 + re^{i\theta}))d\theta$$

pero si consideramos $z_0 = 0$ y $r = 1$ tendremos

$$u(-a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(S_a(e^{i\theta}))d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{u(S_a(z))}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{u(\frac{z-a}{1-\overline{a}z})}{z}dz$$

ahora sea $w = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \Rightarrow z = \dfrac{w+a}{1+\overline{a}w}$ de donde $dz = \dfrac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}w)^2}dw$ y dado que la transformación $g(w) = \dfrac{w+a}{1+\overline{a}w}$ es un automorfismo del disco entonces la curva permanece igual, así

$$\begin{aligned} u(-a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{u(w)}{\left(\frac{w+a}{1+\overline{a}w}\right)}\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}w)^2}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{u(w)}{w+a}\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}w)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})}{e^{i\theta}+a}\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}e^{i\theta})}ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})}{e^{i\theta}+a}\frac{1-|a|^2}{e^{-i\theta}+\overline{a}}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}+a|^2}d\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(-a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}+a|^2}d\theta \;&\Rightarrow\; u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-|-a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2}d\theta \\ &\Rightarrow\; u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-|a|^2}{|a-e^{i\theta}|^2}d\theta \end{aligned}$$

■