Análisis Complejo

Tarea 1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea G_n el conjunto de las n raíces de la unidad. Demostrar que G_n es un grupo (bajo la multiplicación compleja) y que es isomorfo a $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.*

Demostración. – Consideremos las n raíces n-ésimas de la unidad $\zeta_k = \text{cis}(\frac{2\pi ki}{n})$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Primeramente, notemos que para cada $m \in \mathbb{Z}$, se tiene por el algoritmo de la división que existen $q, r \in\in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < n$ tal que $m = nq + r$, de tal forma que

$$\zeta_m = \text{cis}(\tfrac{2\pi ki}{n}) = \text{cis}(\tfrac{2\pi(nq+r)i}{n}) = \text{cis}(\tfrac{2\pi nqi + 2\pi ri}{n}) = \text{cis}(2\pi qi + \tfrac{2\pi ri}{n}) = \text{cis}(\tfrac{2\pi ri}{n}) = \zeta_r$$

es decir, con esto probamos que $\zeta_k = \zeta_m \iff k \equiv m (\text{mod}\, n)$, por lo que hay únicamente n raíces de la unidad y para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe un único $k = 0, 1, \ldots, n-1$ tal que $\zeta_m = \zeta_k$. Con ello podemos probar que bajo la operación de la multiplicación compleja será un grupo, dado las siguientes:

•) La operación es cerrada, pues para ζ_k y ζ_m se tiene que

$$\zeta_k \zeta_m = \text{cis}(\tfrac{2\pi ki}{n})\text{cis}(\tfrac{2\pi mi}{n}) = \text{cis}(\tfrac{2\pi(k+m)i}{n}) = \zeta_{k+m}$$

donde ζ_{k+m} será igual a alguna de las n-raíces de la unidad (esto por lo hecho al inicio).

•) La operación es asociativa, pues para ζ_k, ζ_m, ζ_q se tiene que

$$\zeta_k(\zeta_m \zeta_q) = \zeta_k \zeta_{m+q} = \zeta_{k+(m+q)} \underset{\text{suma en } \mathbb{Z} \text{ es aso.}}{=} \zeta_{(k+m)+q} = \zeta_{k+m}\zeta_q = (\zeta_k \zeta_m)\zeta_q$$

•) Existe elemento neutro, pues para ζ_k podemos considerar ζ_0 por lo que

$$\zeta_k \zeta_0 = \zeta_{k+0} = \zeta_k$$

•) Existen elementos inversos, pues para ζ_k podemos considerar ζ_{-k} (nuevamente usando lo hecho al inicio) por lo que

$$\zeta_k \zeta_{-k} = \zeta_{k-k} = \zeta_0$$

■

Problema 2. *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo y* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de conjuntos cerrados y acotados en* X *, tales que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $F_{n+1} \subset F_n$
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$

Demostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}\,,\ \textit{con } x_0 \textit{ algún punto en } X$$

Demostración. – Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n \neq \varnothing$ y definimos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \bigcap_{k=1}^{n} F_k$. Dicha sucesión esta bien definida, pues dado que $F_n \neq \varnothing$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ esto me implicara que $\bigcap_{k=1}^{n} F_k \subset F_n \neq \varnothing$ por lo que tales x_n´s siempre existen. Veamos que esta sucesión es de cauchy.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, entonces por (ii) sabemos que existirá una $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ se tiene que

$$\sup_{z_n, w_n \in F_n} d(z_n, w_n) < \varepsilon$$

entonces consideremos $n,m > N$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $n > m$, por lo que dado (i), $x_m \in F_m \subset F_n$, es decir, $x_n, x_m \in F_n$, y por definición de diámetro tendremos que

$$d(x_n, x_m) < \operatorname{diam}(F_n) = \sup_{z_n, w_n \in F_n} d(z_n, w_n) \underset{\text{pues } n>N}{<} \varepsilon$$

por lo tanto, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Concluyendo pues que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de cauchy, y dado que X es completo, tendremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en X .

Ahora, para finalizar llamemos por x_0 al punto de convergencia de la sucesión y probaremos que este es el punto donde intersecan todos los F_n, procediendo por doble contención. Dado lo hecho tenemos que $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ pues si pasara que $x_0 \notin F_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ entonces por (i) tendríamos que $x_0 \notin F_k$ para toda $k \geq m$, de donde obtendríamos (por la convergencia de x_n) que existe un $N \in \mathbb{N}$ al partir del cual $x_N \notin F_N$ contradiciendo la construcción de $\{x_n\}$. Ahora por el otro lado sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces $x \in F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ahora consideremos $d(x, x_0)$, por lo que acabamos de hacer sabemos que

$$0 \leq d(x,x_0) \leq \operatorname{diam}(F_n)\ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ 0 \leq d(x,x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0 \quad \therefore\ d(x,x_0) = 0$$

$\therefore$ $x = x_0$ de donde obtenemos finalmente que entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$.

$\blacksquare$

Problema 3. *Sean* $\{z_j\}_{j=1}^n, \{w_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$. *Prueba la identidad de Lagrange:*

$$\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) - \sum_{1\le j<k\le n} |z_j\overline{w}_k - z_k\overline{w}_j|^2$$

A partir de esa, deduce la desigualdad de Cauchy-Bounyakovsky-Schwarz:

$$\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right| \le \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right)}$$

Demostración. – Desarrollando el lado derecho:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n z_j w_j\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^n z_j w_j\right)} = \left(\sum_{j=1}^n z_j w_j\right)\left(\sum_{j=1}^n \overline{z}_j \overline{w}_j\right) = \sum_{j=1}^n z_j w_j \sum_{k=1}^n \overline{z}_k \overline{w}_k \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n z_j w_j \overline{z}_k \overline{w}_k = \sum_{1\le j,k\le n} z_j w_j \overline{z}_k \overline{w}_k = \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j=k}} z_j w_j \overline{z}_k \overline{w}_k + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} z_j w_j \overline{z}_k \overline{w}_k \\
&= \sum_{j=1}^n |z_j|^2 |w_j|^2 + \sum_{1\le j<k\le n} z_j w_k \overline{z}_j \overline{w}_k + z_k w_j \overline{z}_k \overline{w}_j \\
&= \sum_{j=1}^n |z_j|^2 |w_j|^2 + \sum_{1\le j<k\le n} |z_j|^2 |w_k|^2 + |z_k|^2 |w_j|^2
\end{aligned}$$

Pero, por otro lado

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) &= \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{k=1}^n |w_k|^2 = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n |z_j|^2 |w_k|^2 = \sum_{1\le j,k\le n} |z_j|^2 |w_k|^2 \\
&= \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j=k}} |z_j|^2 |w_k|^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} |z_j|^2 |w_k|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 |w_j|^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} |z_j|^2 |w_k|^2
\end{aligned}$$

de donde

$$\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 |w_j|^2 + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} |z_j|^2 |w_k|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) - \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} |z_j|^2 |w_k|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 |w_j|^2$$

Por lo que sustituyendo

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \left\{\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} |z_j|^2\,|w_k|^2\right\} + \sum_{1\le j<k\le n} |z_j|^2\,|w_k|^2 + |z_k|^2\,|w_j|^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{1\le j<k\le n} z_j\overline{w}_k\overline{z}_k w_j + z_k\overline{w}_j\overline{z}_j w_k + \sum_{1\le j<k\le n} |z_j|^2\,|w_k|^2 + |z_k|^2\,|w_j|^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{1\le j<k\le n} \left|z_j\overline{w}_k - z_k\overline{w}_j\right|^2$$

Quedando probado. Luego la desigualdad de Cauchy-Bounyakovsky-Schwarz se sigue de inmediato pues

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{1\le j<k\le n} \left|z_j\overline{w}_k - z_k\overline{w}_j\right|^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right)$$

donde concluimos sacando raíz.

$\blacksquare$

Problema 4. *Sea* $\mathrm{N} = (0,0,1)$, *definimos las siguientes funciones* $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ *y* $\psi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^1$ *dada por*

$$\varphi(p) = \begin{cases} \frac{p_1 + ip_2}{1-p_3}, & \text{si } p \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathrm{N} \\ \infty, & \text{si } p = \mathrm{N} \end{cases} \quad y \quad \psi(z) = \begin{cases} \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ N, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

(*a*) *Demostrar que estas funciones son inversas una de la otra, con lo cual* $\mathbb{S}^1$ *y* $\hat{\mathbb{C}}$ *son isomorfos.*

(*b*) *Demostrar que* φ *transforma circunferencias de* $\mathbb{S}^1$ *que pasan por* N, *en rectas de* $\mathbb{C}$.

Demostración. –

(*a*) Basta probar que $\varphi \circ \psi = id$ y $\psi \circ \varphi = id$.

Por un lado, sea $p \in \mathbb{S}^1$ entonces

$$(\psi\circ\varphi)(p) = \psi(\varphi(p)) = \begin{cases} \psi(\frac{p_1+ip_2}{1-p_3}), & \text{si } p \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathrm{N} \\ \psi(\infty), & \text{si } p = \mathrm{N} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{p_1}{1-p_3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{1-p_3}\right)^2 + 1}\left(2\frac{p_1}{1-p_3}, 2\frac{p_2}{1-p_3}, \left(\frac{p_1}{1-p_3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{1-p_3}\right)^2 - 1\right) \\ N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1-p_3)^2}{p_1^2+p_2^2+(1-p_3)^2}\left(\frac{2p_1}{1-p_3}, \frac{2p_2}{1-p_3}, \frac{p_1^2}{(1-p_3)^2} + \frac{p_2^2}{(1-p_3)^2} - 1\right) \\ N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p_1^2+p_2^2+(1-p_3)^2}\left(2p_1(1-p_3), 2p_2(1-p_3), p_1^2 + p_2^2 - (1-p_3)^2\right) \\ N \end{cases}$$

pero como $p \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ por lo que

$$(\psi \circ \varphi)(p) = \begin{cases} \frac{1}{p_1^2+p_2^2+1-2p_3+p_3^2}\left(2p_1(1-p_3), 2p_2(1-p_3), p_1^2 + p_2^2 - 1 + 2p_3 - p_3^2\right) \\ N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2-2p_3}\left(p_1(2-2p_3), p_2(2-2p_3), 1 - p_3^2 - 1 + 2p_3 - p_3^2\right) \\ N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2-2p_3}\left(p_1(2-2p_3), p_2(2-2p_3), p_3(2-2p_3)\right) \\ N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (p_1, p_2, p_3) \\ N \end{cases}$$

por lo tanto, $\psi \circ \varphi = id$, por otro lado sea $z \in \hat{\mathbb{C}}$, entonces

$$(\varphi \circ \psi)(z) = \varphi(\psi(z)) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \varphi(N), & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1} + i\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}}{1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} \\ \infty \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\frac{2\operatorname{Re} z + 2i\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}}{\frac{|z|^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1}} \\ \infty \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\operatorname{Re} z + 2i\operatorname{Im} z}{2} \\ \infty \end{cases} = \begin{cases} z \\ \infty \end{cases}$$

por lo tanto $\varphi \circ \psi = id$.

■

Problema 5. *Definamos una métrica en $\hat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:*

$$\hat{d}(z,w) = \left\|\psi(z) - \psi(w)\right\|, \quad z,w \in \hat{\mathbb{C}}$$

Demuestre que

$$\hat{d}(z,w) = \begin{cases} \dfrac{z|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } z,w \in \mathbb{C} \\ \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

Demostración. – En efecto, consideremos $z,w \in \hat{\mathbb{C}}$, entonces

$$\hat{d}(z,w) := \left\|\psi(z) - \psi(w)\right\| = \begin{cases} \left\|\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) - \left(\frac{2\operatorname{Re}w}{|w|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)\right\| & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \left\|\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) - (0,0,1)\right\| & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left\|\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1} - \frac{2\operatorname{Re}w}{|w|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1} - \frac{2\operatorname{Im}w}{|w|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)\right\| & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \left\|\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - 1\right)\right\| & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1} - \frac{2\operatorname{Re}w}{|w|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1} - \frac{2\operatorname{Im}w}{|w|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)^2} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - 1\right)^2} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{4(\operatorname{Re}z)^2}{(|z|^2+1)^2} - 2\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}\frac{2\operatorname{Re}w}{|w|^2+1} + \frac{4(\operatorname{Re}w)^2}{(|w|^2+1)^2}\right) + \left(\frac{4(\operatorname{Im}z)^2}{(|z|^2+1)^2} - 2\frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}\frac{2\operatorname{Im}w}{|w|^2+1} + \frac{4(\operatorname{Im}w)^2}{(|w|^2+1)^2}\right) + \left(\frac{(|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2} - 2\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} + \frac{(|w|^2-1)^2}{(|w|^2+1)^2}\right)} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\left(\frac{4(\operatorname{Re}z)^2}{(|z|^2+1)^2}\right) + \left(\frac{4(\operatorname{Im}z)^2}{(|z|^2+1)^2}\right) + \left(\frac{(|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2} - 2\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} + 1\right)} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{4(\operatorname{Re}z)^2 + 4(\operatorname{Im}z)^2 + (|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2}\right) - 2\left(\frac{4\operatorname{Re}z\operatorname{Re}w + 4\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w + (|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}\right) + \left(\frac{4(\operatorname{Re}w)^2 + 4(\operatorname{Im}w)^2 + (|w|^2-1)^2}{(|w|^2+1)^2}\right)} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\frac{4(\operatorname{Re}z)^2 + 4(\operatorname{Im}z)^2 + (|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2} - 2\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} + 1} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{4|z|^2 + (|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2}\right) - 2\left(\frac{4\operatorname{Re}z\operatorname{Re}w + 4\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w + (|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}\right) + \left(\frac{4|w|^2 + (|w|^2-1)^2}{(|w|^2+1)^2}\right)} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\frac{4|z|^2 + (|z|^2-1)^2}{(|z|^2+1)^2} - 2\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} + 1} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2 - 2\left(\frac{4\operatorname{Re}z\operatorname{Re}w + 4\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w + (|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}\right)} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{2 - 2\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2(1+|z|^2)(1+|w|^2) - 8\operatorname{Re}z\operatorname{Re}w - 8\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w - 2(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\frac{4}{|z|^2+1}} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(1+|w|^2+|z|^2+|w|^2|z|^2)-8\operatorname{Re} z\operatorname{Re} w-8\operatorname{Im} z\operatorname{Im} w-2(|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\dfrac{4}{|z|^2+1}} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4+4|w|^2+4|z|^2-8\operatorname{Re} z\operatorname{Re} w-8\operatorname{Im} z\operatorname{Im} w}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\dfrac{4}{|z|^2+1}} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{4\dfrac{(z-w)(z-\overline{w})}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\dfrac{4}{|z|^2+1}} & \text{si } w = \infty \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } w \in \mathbb{C} \\ \sqrt{\dfrac{4}{|z|^2+1}} & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

■