Análisis Complejo

Tarea 2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Sea* Ω y G *dominios en el plano, y* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \cap C^2(\Omega, \mathbb{C})$ *tal que* $f(\Omega) \subset G$. *Demostrar que para cualquier función* $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$, *se tiene que* $u \circ f \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{R})$.

Demostración. – La condición $f(\Omega) \subset G$ nos garantiza que $u \circ f$ está bien definida y además, dado que $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ *y* $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$, por la regla de la cadena la función $u \circ f$ será diferenciable y existirán sus derivadas parciales.

Ahora, tenemos

$$\Delta(u \circ f) = 4\partial_z \partial_{\overline{z}}(u \circ f) = 4\partial_z \left(\left[(\partial_z u) \circ f \right] \cdot \partial_{\overline{z}} f + \left[(\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right] \cdot \partial_{\overline{z}} \overline{f} \right)$$

Pero como f es holomorfa, $\partial_{\overline{z}} f = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \Delta(u \circ f) &= 4\partial_z \left(\left[(\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right] \cdot \partial_{\overline{z}} \overline{f} \right) = 4\partial_z \left(\left[(\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right] \cdot \overline{\partial_z f} \right) \\ &= 4\partial_z \left((\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right) \cdot \overline{\partial_z f} + \left[(\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right] \cdot 4\partial_z \overline{\partial_z f} \\ &= 4\partial_z \left((\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right) \cdot \overline{\partial_z f} + \left[(\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right] \cdot 4\partial_z \overline{\partial_z f} \end{aligned}$$

Y ahora como $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ entonces $\partial_z f$ es holomorfa por lo tanto $\overline{\partial_z f}$ es anti holomorfa y entonces $\partial_z \overline{\partial_z f} = 0$, obteniendo

$$\Delta(u \circ f) = 4\partial_z \left((\partial_{\overline{z}} u) \circ f \right) \cdot \overline{\partial_z f} = \left[((4\partial_z \partial_{\overline{z}} u) \circ f) \cdot \partial_z f + ((4\partial_{\overline{z}} \partial_{\overline{z}} u) \circ f) \cdot \partial_z \overline{f} \right] \cdot \overline{\partial_z f}$$

de nuevo, tenemos que $\partial_z \overline{f} = 0$, y usando el hecho de que u es armónica obtenemos

$$\Delta(u \circ f) = ((4\partial_z \partial_{\overline{z}} u) \circ f) \cdot \partial_z f \cdot \overline{\partial_z f} = ((\Delta u) \circ f) \cdot \left| \partial_z f \right|^2 = ((0) \circ f) \cdot \left| \partial_z f \right|^2 = 0$$

Por lo tanto $u \circ f$ es armónica.

$\blacksquare$

Problema 2. *Suponga que f es una función entera que satisface*

$$f(z) = u(x) + iv(y)$$

Demostrar que f es un polinomio lineal.

Demostración. – Dado que f es entera, cumplirá las ecuaciones de Cauchy-Riemann, siendo

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = v'(y) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

pero esto solo puede pasar si u' y v' son constantes y además iguales, de donde $u(x) = ax + c_1$ y $v(y) = ay + c_2$ para constantes $a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, de donde

$$f(x + iy) = u(x) + iv(y) = (ax + c_1) + i(ay + c_2) = a(x + iy) + c_1 + ic_2$$

$\therefore$ $f(z) = az + c$ es un polinomio lineal con $a \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$.

■

Problema 3. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathrm{Hol}(G)$. Suponga que existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$, tales que*

$$a \cdot u(z) + b \cdot v(z) = c, \quad \forall z \in G$$

Demostrar que f' es constante en G. ¿Cambia algo si $a, b \in \mathbb{C}$?

Demostración. – Notemos que si pasara que $a = b = 0$, entonces el problema es falso. Así consideremos a y b no cero simultáneamente.

De la igualdad podemos derivar respecto a x e y obteniendo el sistema

$$a \cdot u_x + b \cdot v_x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot u_x + b \cdot v_x = 0 \\ a \cdot u_y + b \cdot v_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como a y b no son cero simultáneamente, entonces necesariamente el determinante del sistema es cero, es decir $u_x v_y - u_y v_x = 0$, y como f es holomorfa tendremos que cumple C-R, de donde

$$\begin{cases} \left(v_y\right) v_y - \left(-v_x\right) v_x = 0 \\ u_x (u_x) - u_y (-u_y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {v_y}^2 + {v_x}^2 = 0 \\ {u_x}^2 + {u_y}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_y = v_x = u_x = u_y = 0$$

por lo que f' es constante.

El resultado no cambia si $a, b \in \mathbb{C}$, en tal caso consideramos $a = a_1 + ia_2$ y $b = b_1 + ib_2$, de donde de la misma manera consideramos a y b no cero simultáneamente, y si derivamos en la igualdad obtenemos

$$\begin{cases} a \cdot u_x + b \cdot v_x = 0 \\ a \cdot u_y + b \cdot v_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 \cdot u_x + b_1 \cdot v_x) + i(a_2 \cdot u_x + b_2 \cdot v_x) = 0 \\ (a_1 \cdot u_y + b_1 \cdot v_y) + i(a_2 \cdot u_y + b_2 \cdot v_y) = 0 \end{cases}$$

pero de esta podemos tomar el sistema $\begin{cases} a_1 \cdot u_x + b_1 \cdot v_x = 0 \\ a_1 \cdot u_y + b_1 \cdot v_y = 0 \end{cases}$, obteniendo el mismo resultado realizando el procedimiento análogo. (en caso de que $a_1 = b_1 = 0$ tomamos el segundo sistema)

■

Problema 4. *Demostrar que las ecuaciones de cauchy-Riemann en coordenadas polares toman la forma*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

¿Cómo se vería el operador $\partial_{\bar{z}}$?

Demostración. – Supongamos que f es holomorfa, por lo cual se cumplen las ecuaciones de C-R. Ahora, consideremos a f en su forma polar, $f(r,\theta) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde se hace el cambio $x(r,\theta) = r\cos\theta$ y $y(r,\theta) = r\sin\theta$, entonces por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta\right] \\ &\underset{\text{C-R}}{=} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial x}r\sin\theta\right] \end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta$$

por lo que de esta dos obtenemos que $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$

De forma similar

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta = -r\left[\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right] \\ &\underset{\text{C-R}}{=} -r\left[\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\right] \end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta$$

por lo que de esta dos obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

Finalmente, de lo anterior tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} u_r \cdot r\cos\theta - u_\theta \cdot \sin\theta \\ u_r \cdot r\sin\theta + u_\theta \cos\theta \end{pmatrix}$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{r}\left(u_r \cdot r\cos\theta - u_\theta \cdot \sin\theta\right) \\ u_y = \frac{1}{r}\left(u_r \cdot r\sin\theta + u_\theta \cos\theta\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = u_r \cdot \cos\theta - u_\theta \cdot \frac{1}{r}\sin\theta \\ u_y = u_r \cdot \sin\theta + u_\theta \cdot \frac{1}{r}\cos\theta \end{cases}$$

y de forma análoga para v, de donde finalmente

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{z}} f &= \frac{1}{2}\left[\partial_x + i\partial_y\right] f = \frac{1}{2}\partial_x f + i\frac{1}{2}\partial_y f = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_y\right) + i\frac{1}{2}(u_y + iv_y) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[u_r \cos\theta - u_\theta \tfrac{1}{r}\sin\theta\right] + i\left[v_r \cos\theta - v_\theta \tfrac{1}{r}\sin\theta\right]\right) + i\frac{1}{2}(\left[u_r \sin\theta + u_\theta \tfrac{1}{r}\cos\theta\right] + i\left[v_r \sin\theta + v_\theta \tfrac{1}{r}\cos\theta\right]) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_r \cos\theta - u_\theta \tfrac{1}{r}\sin\theta + iv_r \cos\theta - iv_\theta \tfrac{1}{r}\sin\theta\right) + i\frac{1}{2}(u_r \sin\theta + u_\theta \tfrac{1}{r}\cos\theta + iv_r \sin\theta + iv_\theta \tfrac{1}{r}\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left[u_r r\cos\theta + iv_r r\cos\theta + iu_r r\sin\theta - v_r r\sin\theta - u_\theta \sin\theta - iv_\theta \sin\theta + iu_\theta \cos\theta - v_\theta \cos\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left[\left(u_r + iv_r\right) r\cos\theta + \left(u_r + iv_r\right) ir\sin\theta - \left(u_\theta + iv_\theta\right)\sin\theta + \left(u_\theta + iv_\theta\right) i\cos\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left[\left(u_r + iv_r\right) re^{i\theta} - \left(u_\theta + iv_\theta\right) ie^{-i\theta}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left[\left(\partial_r f\right) re^{i\theta} - \left(\partial_\theta f\right) ie^{-i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left[\left(\partial_r\right) re^{i\theta} - \left(\partial_\theta\right) ie^{-i\theta}\right] f
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2r}\left[re^{i\theta} \cdot \partial_r - ie^{-i\theta} \cdot \partial_\theta\right]$$

$\blacksquare$

Problema 5. *Sean* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones complejas tales que* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *y* $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *y suponga que ambas series convergen absolutamente. Demostrar que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) = A \cdot B$$

y que esta serie también converge absolutamente.

Demostración. – Llamemos por $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$. Probaremos que la serie $\sum c_n$ converge absolutamente. Dado que por hipótesis las series A y B convergen absolutamente, tendremos que la sucesión de sumas parciales de cada serie es acotada, digamos por $C_A, C_B \in \mathbb{R}^+$ respectivamente, de donde

$$\sum_{n=0}^{N}|c_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|\right) \leq C_A \cdot C_B$$

(esta desigualdad se puede ver pues en el producto aparece el término $|a_n||b_n|$ que no está en el original) por lo que la sucesión de sumas parciales de $|c_n|$ es acotada y al ser de términos positivos, tendremos que la serie converge, por lo que la serie original converge absolutamente.

Ahora, dado que la serie converge absolutamente, podemos reordenarla de tal forma que nos convenga,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{0} a_{n-k}b_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{1} a_{n-k}b_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{2} a_{n-k}b_k\right) + + \left(\sum_{k=0}^{3} a_{n-k}b_k\right)\cdots \\
&= (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)\cdots \\
&= (a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + \cdots) + (a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots) + (a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots) + \cdots \\
&= a_0(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) + a_1(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) + a_2(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) + \cdots \\
&= A \cdot B
\end{aligned}$$

■

Problema 6. *Calcular el radio de convergencia de las siguientes series:*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$, *con* $a \in \mathbb{C}$

Demostración. –

(*a*) Tenemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ donde $a_n = 1$ si $n = k!$ p.a $k \in \mathbb{N}$ y cero en otro caso, de donde

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|1|} = 1$$

por tanto el radio de convergencia es $R = 1$.

(b) Tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ donde $a_n = \dfrac{(-1)^k}{k}$ si $n = k(k+1)$ p.a $k \in \mathbb{N}$ y cero en otro caso, de donde

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k(k+1)]{\left|\frac{(-1)^k}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty} k^{-\frac{1}{k(k+1)}}$$

pero, por L´Hopital sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{\ln(x)}{x(x+1)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{x(x+1)}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x(x+1)}\right) = \exp(0) = 1$$

por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ y el radio de convergencia es $R = 1$.

(b) Tenemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ donde $b_n = a^{n^2}$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \begin{cases} 1 \text{ si } a = 1 \\ 0 \text{ si } a < 1 \\ \infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

por lo tanto, por el teorema de Cauchy-Hadamard, el radio de convergencia será $R = \begin{cases} 1 \text{ si } a = 1 \\ \infty \text{ si } a < 1 \\ 0 \text{ si } a > 1 \end{cases}$

■

Problema 7. *Expandir $(1 - z)^{-m}$, con $m \in \mathbb{N}$, en serie de potencias centrada en $z = 0$ y encontrar el radio de convergencia.*

Demostración. – Demostraremos mediante inducción que la serie de potencias de la función centrada en cero será:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{m-1} z^k$$

Con radio de convergencia $R = 1$. En efecto, para $m = 1$ no es más que la serie geométrica. Supongamos cierto para algún $n > 1$, entonces

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right)^{n} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1} z^k\right)$$

y usando el producto de Cauchy y la hipótesis tendremos que la serie producto también será convergente y tendrá radio de convergencia $R = 1$, además

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{k}\binom{n+r-1}{n-1}\right] z^k$$

Sin embargo,

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{n+r-1}{n-1} = \sum_{r=n-1}^{n+k-1}\binom{r}{n-1} =^{\Sigma} \binom{n+k}{n}$$

por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n-1} z^k$$

quedando demostrado.

■

Problema 8.

(*i*) *Sea* $v \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la serie de potencias*

$$J_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+v)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+v}$$

tiene radio de convergencia infinito y por ende, J_v *es una función entera, y se conoce como la Función de Bessel de la primera especia de orden v.*

(*ii*) *Demostrar la relación* $J_v(-z) = (-1)^v J_v(z)$.

(*iii*) *Demostrar que* J_v *satisface la EDO:*

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - v^2) y(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

(*iv*) *Explique porque para valores de z reales,* $J_v(z)$ *es real y grafique las primeras 5 funciones de Bessel para* $0 \leq x \leq 10$.

Solución. –

(*i*) Tenemos que

$$J_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+v)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+v} = \sum_{m=0}^{\infty} a_n z^n$$

$^{\Sigma}$ Esta propiedad es conocida en combinatoria, $\sum_{m=k}^{n}$ Binomial$[m,k]$ = Binomial$[n+1,k+1]$

donde

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{m!(m+v)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m+v} & \text{si } n = 2m+v, \ p.a \ m \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

de donde entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[2m+v]{\left|\frac{(-1)^m}{m!(m+v)!}\left(\frac{1}{2^{2m+v}}\right)\right|} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[2m+v]{\frac{1}{m!(m+v)!}\left(\frac{1}{2^{2m+v}}\right)}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt[2m+v]{\frac{1}{m!}} \sqrt[2m+v]{\frac{1}{(m+v)!}} \sqrt[2m+v]{\left(\frac{1}{2^{2m+v}}\right)} = \lim_{m\to\infty} (m!)^{-1/2m+v}((m+v)!)^{-1/2m+v} 2^{-1}$$

pero para $m > 2$, tenemos que $(m+v)! > 1 \Rightarrow ((m+v)!)^{-1/2m+v} < 1$, de donde

$$(m!)^{-1/2m+v}((m+v)!)^{-1/2m+v}2^{-1} < (m!)^{-1/2m+v} < (m!)^{-1/2m}$$

y usando la aproximación de Stirling para el factorial,

$$(m!)^{-1/2m+v}((m+v)!)^{-1/2m+v}2^{-1} < (\sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m)^{-1/2m} = (2\pi m)^{-1/4m}(\frac{m}{e})^{-1/2} = \sqrt[4m]{\frac{1}{2\pi m}}\sqrt{\frac{e}{m}}$$

por lo que finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < \lim_{m\to\infty} \sqrt[4m]{\frac{1}{2\pi m}}\sqrt{\frac{e}{m}} \ ^{\Pi} < \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{e}{m}} = 0$$

por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ y entonces por el teorema de Cauchy-Hadamard el radio de convergencia es infinito.

(ii) Tenemos por definición de la función que

$$J_v(-z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-v)!}\left(\frac{-z}{2}\right)^{2m+v} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-v)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} (-z)^{2m+v}$$

$$= (-1)^v \sum_{m=v}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-v)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+v} = (-1)^v J(z)$$

(iii) Por el inciso (i) sabemos que la función es entera, y por tanto existen sus derivadas, las cuales vendrán dadas por (suponiendo que $v > 2$, donde los primeros casos serán análogos a este)

$^{\Pi}$ Esto es debido a que $1/2\pi m < 1 \Rightarrow (1/2\pi m)^{1/4m} < 1$

$$J_v{}'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+v)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v-1}$$

$$J_v{}''(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+v)(2m+v-1)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v-2}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
&z^2 J_v{}''(z) + zJ_v{}'(z) \\
&\quad = z^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+v)(2m+v-1)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v-2} \right) + z \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+v)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v-1} \right) \\
&\quad = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+v)(2m+v-1)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v} \right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+v)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v} \right) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m (2m+v)(2m+v-1)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} + \frac{(-1)^m (2m+v)}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} \right] z^{2m+v} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \big[(2m+v-1)+1\big](2m+v) \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+v)^2 \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v}
\end{aligned}$$

por otro lado

$$(z^2 - v^2)J_v(z) = (z^2 - v^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+v} = (z^2 - v^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v}$$

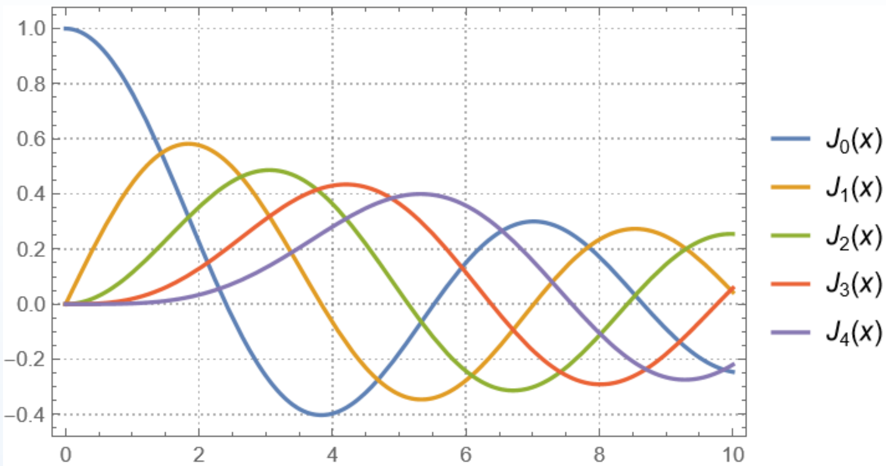
entonces

$$\begin{aligned}
&z^2 J_v{}''(z) + zJ_v{}'(z) + (z^2 - v^2)J_v(z) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+v)^2 \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v} + (z^2 - v^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} (4m^2 + 4mv) \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2m+v} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2(m+1)+v} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} (4(m+1) + 4v) \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(m+1)+v} z^{2(m+1)+v} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} z^{2(m+1)+v} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+1+v) \frac{4(-1)^{m+1}}{(m+1)!(m+1+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(m+1)+v} + \frac{(-1)^m}{m!(m+v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} \right] z^{2(m+1)+v}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+v)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} + \frac{(-1)^{m}}{m!(m+v)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v}\right] z^{2(m+1)+v}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^{m}}{m!(m+v)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v} + \frac{(-1)^{m}}{m!(m+v)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+v}\right] z^{2(m+1)+v} = 0$$

(iv) Para $z \in \mathbb{R}$ tenemos una serie de potencias reales, por lo que su valor es real. Las primeras funciones de Bessel son las siguientes:



■

Problema 9. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con radio de convergencia infinito. Demostrar que el conjunto de ceros de f es discreto y a lo más numerable.*

Demostración. – Notemos que para que el resultado sea cierto se debe suponer también que f no es la función constante cero.

Por contradicción, supongamos que el conjunto de ceros ζ no es discreto, por tanto, tiene al menos un punto de acumulación digamos $w \in \mathbb{C}$. Ahora, dado que w es punto de acumulación sabemos que existirá una sucesión no constante $\{w_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \zeta$ de números complejos tales que $w_k \to w$, con ello tendremos una sucesión de números complejos convergente tal que f se anula en ella, entonces por el teorema de identidad, la función es la constante cero !!!, lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto el conjunto de ceros debe ser discreto y por tanto será a lo más numerable.

■