Análisis Complejo

Tarea 3

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Evaluar:*

$$\int_{|z|=1} x dz$$

Demostración. – Consideremos la parametrización de la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} x dz &= \int_{|z|=1} \operatorname{Re}(z) dz \underset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(e^{it}) i e^{it} dt \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos(t) e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} \cos(t)[\cos(t) + i\sin(t)] dt = i\int_0^{2\pi} \cos^2(t) + i\sin(t)\cos(t) dt \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt - \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) dt = i\left[\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} - \left[-\frac{1}{2}\cos^2(x)\right]_0^{2\pi} \\
&= i\left[\left(0 + \frac{1}{2}2\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}(0)\right)\right] - \left[\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= i\pi - 0 = i\pi
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\displaystyle\int_{|z|=1} x dz = i\pi$

■

Problema 2. *Evaluar:*

$$\int_\gamma \frac{z}{z^2 + 8} dz$$

donde γ *es el triángulo que une a* 1, i, $-i$ *en ese orden.*

Demostración. – Sea $F(z) = \frac{1}{2}\log(z^2 + 8)$, notemos que esta función es holomorfa para todos los $z \in \mathbb{C}$ excepto aquellos tales que $\arg(z^2 + 8) = \pi \Leftrightarrow z^2 + 8 = -t$, con $t \in \mathbb{R}^+$, de donde

$$z^2 + 8 = -t \Leftrightarrow z^2 = -(t + 8) \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{8} = \pm i2\sqrt{2}$$

por lo tanto tenemos que F es analítica en $\mathbb{C}$ excepto en los rayos $l_1 : i2\sqrt{2}t$ y $l_2 : i2\sqrt{2}t$ donde la curva γ esta completamente contenida y además $F'(z) = \dfrac{z}{z^2 + 8}$, entonces por el teorema fundamental y dado que la curva es cerrada $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z^2 + 8} dz = 0$.

■

Problema 3. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathrm{Hol}(G)$ y γ una curva en G. Demostrar que*

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz$$

Es puramente imaginario.

Demostración. – El problema es falso, consideremos $G = D(0,2)$ y γ el segmento de recto que une a 0 con i con parametrización $\gamma(t) = it,\ t \in [0,1]$, consideremos $f(z) = z$, entonces $f \in Hol(G)$, pero

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz = \int_\gamma \overline{z} \frac{d}{dz}(z) dz = \int_\gamma \overline{z} dz = \int_0^1 (\overline{it})(i) dt = \int_0^1 (-it)(i) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

por lo que no es puramente imaginaria.

■

Problema 4. *Sea C la circunferencia con radio $R > 0$ y centro $a \in \mathbb{C}$ orientada en el sentido antihorario, y $P(z)$ un polinomio. Demostrar que*

$$\int_C P(z) d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a)$$

Demostración. – Consideremos $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ y la parametrización de C cómo $\gamma(t) = a + R\mathrm{e}^{\hat{\imath}t},\ t \in [0, 2\pi]$. Dado que $\int_\gamma f(z) d\overline{z} = \overline{\int_\gamma \overline{f(z)} dz}$ entonces la linealidad se sigue cumpliendo cuando integramos respecto a $\overline{z}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_C P(z) d\overline{z} &= \int_C \sum_{k=0}^n c_k z^k d\overline{z} = \sum_{k=0}^n c_k \int_C z^k d\overline{z} = \sum_{k=0}^n c_k \left[\int_0^{2\pi} (\gamma(t))^k \overline{\gamma'(t)} dt \right] \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \left[\int_0^{2\pi} (a + R\mathrm{e}^{\hat{\imath}t})^k \overline{(iR\mathrm{e}^{\hat{\imath}t})} dt \right] = \sum_{k=0}^n c_k \left[\int_0^{2\pi} (a + R\mathrm{e}^{\hat{\imath}t})^k (-iR\mathrm{e}^{-\hat{\imath}t}) dt \right] \\
&= -iR \sum_{k=0}^n c_k \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\hat{\imath}t} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} R^j e^{itj} dt \right] = -iR \sum_{k=0}^n c_k \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} R^j \int_0^{2\pi} e^{it(j-1)} dt \right]
\end{aligned}$$

sin embargo para $j \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{it(j-1)} dt &= \int_0^{2\pi} \cos(t(j-1)) dt + i \int_0^{2\pi} \sin(t(j-1)) dt \\
&= \frac{\sin(t(j-1))}{j-1} \Big|_0^{2\pi} - i \frac{\cos(t(j-1))}{j-1} \Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

por lo que

$$\int_C P(z)d\overline{z} = -iR\sum_{k=0}^{n} c_k\left[\binom{k}{1}a^{k-1}R^1\int_0^{2\pi} e^{it(1-1)}dt\right] = -iR\sum_{k=0}^{n} c_k\left[ka^{k-1}R\int_0^{2\pi} 1dt\right]$$
$$= -iR\sum_{k=0}^{n} c_k k a^{k-1}R2\pi = -2\pi iR^2\sum_{k=0}^{n} c_k k a^{k-1} = -2\pi iR^2 P'(a)$$

■

Problema 6. *Evaluar:*

$$\int_\Gamma \frac{z^2+z}{(z-2i)(z+3)}dz$$

donde γ *es la circunferencia con centro en 1 y radio 5 orientada en contra de las manecillas del reloj.*

Demostración. – Usando fracciones parciales tenemos que

$$\int_\Gamma \frac{z^2+z}{(z-2i)(z+3)}dz = \int_\Gamma (z^2+z)\frac{1}{(z-2i)(z+3)}dz$$
$$= \int_\Gamma (z^2+z)\left[\frac{\frac{1}{13}(3-2i)}{z-2i} - \frac{\frac{1}{13}(3-2i)}{z+3}\right]dz$$
$$= \frac{3-2i}{13}\int_\Gamma \frac{z^2+z}{z-2i}dz - \frac{3-2i}{13}\int_\Gamma \frac{z^2+z}{z+3}dz$$

donde dado que la función $f(z) = z^2+z$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y los puntos $2i, -3$ pertenecen al interior de la curva, tendremos por el la formula integral de cauchy

$$\int_\Gamma \frac{z^2+z}{(z-2i)(z+3)}dz = \frac{3-2i}{13}2\pi i f(2i) - \frac{3-2i}{13}2\pi i f(-3)$$
$$= \frac{3-2i}{13}2\pi i(-4+2i) - \frac{3-2i}{13}2\pi i f(9-3) = \frac{2\pi}{13}(3-2i)\big[i(-4+2i) - i(6)\big]$$
$$= \frac{2\pi}{13}(3-2i)\big[-10i-2\big] = \frac{2\pi}{13}26(-1-i) = 4\pi(-1-i)$$

■

Problema 7. *Demostrar que si γ es una curva de clase C^1 de variación acotada, entonces $V(\gamma) = \ell(\gamma)$*

Demostración. – Como γ es de clase C^1 existe su longitud, dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt$$

y dado que es integrable, tendremos que será igual al supremo de las sumas de Riemann dada una partición $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ y dado cuales quiera $x_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\ell(\gamma) = \sup_{P \in \wp[a,b]} \{S(f,P)\} = \sup_{P \in \wp[a,b]} \left\{\sum_{i=0}^{n} \left|\gamma'(x_i)\right|(t_{i+1} - t_i)\right\}$$

Por otro lado como γ es de clase C^1 tendremos por el teorema del valor medio existe un punto $w_i \in [t_i, t_{i+1}]$ tal que

$$\left|\gamma(w_i)\right| = \frac{\left|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\right|}{t_{i+1} - t_i}$$

por lo que tomamos estos puntos para cada partición, de donde

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \sup_{P \in \wp[a,b]} \left\{\sum_{i=0}^{n} \left|\gamma'(w_i)\right|(t_{i+1} - t_i)\right\} = \sup_{P \in \wp[a,b]} \left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\right|}{t_{i+1} - t_i}(t_{i+1} - t_i)\right\} \\ &= \sup_{P \in \wp[a,b]} \left\{\sum_{i=0}^{n} \left|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\right|\right\} = V(\ell) \end{aligned}$$

esto pues dado que la curva es de variación acotada dicho supremo existe.

$\blacksquare$