Análisis Complejo

Tarea 4

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Sea f una función entera y suponga que existen A, B, $R > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\left|f(z)\right| \leq A + B\left|z\right|^N, \ \forall \left|z\right| \geq R$$

Demostrar que f es un polinomio de grado a lo más N.

Demostración. – Dado que f es analítica en todo $\mathbb{C}$, tendremos que se puede representar como serie de potencias alrededor del origen, donde el radio de convergencia es infinito.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

donde el coeficiente $a_n = f^{(n)}(0)\big/n!$. Por otro lado, sabemos que por la desigualdad de Cauchy para todo r menor al radio de convergencia

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in B(0,r)} \left|f(z)\right|$$

y considerando $r > R$ tendremos que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n}\left(A + B\left|z\right|^N\right)$$

de donde tomando el límite cuando $r \to \infty$ tendremos

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{n!}{r^n}\left(A + B\left|z\right|^N\right) = \lim_{r \to \infty} \frac{\left|z\right|^N}{r^n} Bn! \underset{\text{si } n > N}{=} 0$$

por lo tanto $f^{(n)}(0) = 0, \ \ \forall n > N$ de donde entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

es un polinomio.

■

Problema 2. *Sea D un dominio y $a \in D$, $r > 0$ tales que $\overline{B}(a,r) \subset D$. Suponga que $f \in \mathrm{Hol}(D)$*

(i) *Demostrar que*

$$f(a) = \frac{1}{\mathrm{Area}(B(a,r))} \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta) dA_\zeta$$

(ii) *Demostrar que*

$$|f(a)| \leq C \iint\limits_{B(a,r)} |f(\zeta)|^2 \, dA_\zeta$$

donde $C > 0$ es una constante que no depende de f.

Demostración. –

(i) Dado que $f \in \mathrm{Hol}(D)$ tendremos por la formula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(s)}{s-a} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(s)}{s-a} \frac{\overline{s}-\overline{a}}{\overline{s}-\overline{a}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(s)(\overline{s}-\overline{a})}{|s-a|^2} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(s)(\overline{s}-\overline{a})}{r^2} ds = \frac{1}{2\pi i r^2} \int_{\partial B(a,r)} f(s)(\overline{s}-\overline{a}) ds \end{aligned}$$

y entonces por el teorema de Green complejo

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i r^2} \left[2i \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta) \partial_{\overline{\zeta}} (\overline{\zeta} - \overline{a}) dA_\zeta + 2i \iint\limits_{B(a,r)} (\overline{\zeta} - \overline{a}) \partial_{\overline{\zeta}} (f(\zeta)) dA_\zeta \right]$$

pero dado que f es holomorfa, $\partial_{\overline{\zeta}} f(\zeta) = 0$, de donde

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i r^2} 2i \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta)(1) dA_\zeta = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta) dA_\zeta$$

(ii) Por el inciso anterior

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta) dA_\zeta \Rightarrow |f(a)|^2 = \frac{1}{\pi^2 r^4} \left| \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta) dA_\zeta \right|^2$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left| \iint\limits_{B(a,r)} f(\zeta) dA_\zeta \right|^2 \leq \left(\iint\limits_{B(a,r)} 1^2 dA_\zeta \right) \left(\iint\limits_{B(a,r)} |f(\zeta)|^2 \, dA_\zeta \right) = \pi r^2 \iint\limits_{B(a,r)} |f(\zeta)|^2 \, dA_\zeta$$

de donde

$$|f(a)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B(a,r)} |f(\zeta)|^2 \, dA_\zeta$$

■

Problema 3. *Para $m \in \mathbb{N}$ evaluar*

$$\int_C \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m}\,dz$$

donde $C = \partial B(1, \frac{1}{2})$ recorrida una vez en sentido positivo.

Solución. – Consideremos $f(z) = z^{1/m}$, entonces tomamos la rama principal del logaritmo, siendo esta el rayo de los reales negativos, siendo pues que no pasa por nuestra curva, entonces la funcion f sera completamente analítica sobre y en el interior de la curva, asi como $1 \in \operatorname{int} C$ dado el teorema de Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^m}\,dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(1)$$

pero

$$\begin{aligned} f^{(0)}(z) = z^{1/m} \quad &\Rightarrow f^{(1)}(z) = \frac{1}{m} z^{1/m-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(z) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)z^{1/m-2} \\ \cdots \quad &\Rightarrow \quad f^{(m-1)}(z) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\cdots(\frac{1}{m}-(m-2))z^{1/m-(m-1)} \\ &\Rightarrow \quad f^{(m-1)}(1) = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\cdots(\frac{1}{m}-(m-2)) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^m}\,dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\cdots(\frac{1}{m}-(m-2))$$

■

Problema 4. *Encuentra el valor máximo de $|\sin(z)|$ en el cuadrado cerrado $[0,\pi]\times[0,1]$*

Solución. – Dado que la función $\sin(z)$ es entera, el principio del módulo máximo me asegura que el máximo se alcanzara en la frontera del conjunto, por lo que bastara encontrar el valor en estos puntos. Recordemos que

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

de donde

$$\begin{aligned} |\sin(x+iy)| &= \sqrt{\sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y)} = \sqrt{\sin^2(x)[1+\sinh^2(y)] + \cos^2(x)\sinh^2(y)} \\ &= \sqrt{\sin^2(x) + (\sin^2(x)+\cos^2(x))\sinh^2(y)} = \sqrt{\sin^2(x)+\sinh^2(y)} \end{aligned}$$

y lo comprobaremos en las curvas $\gamma_1(t) = t,\ t \in [0,\pi]$, $\gamma_2(t) = \pi + it,\ t \in [0,1]$, $\gamma_3(t) = t + i,\ t \in [0,\pi]$ y $\gamma_4(t) = it,\ t \in [0,1]$.

• $|\sin(\gamma_1(t))| = \sqrt{\sin^2(t) + \sinh^2(0)} = \sin(t)$ el máximo en esta curva será 1.
• $|\sin(\gamma_2(t))| = \sqrt{\sin^2(\pi) + \sinh^2(t)} = \sinh(t)$ el máximo en esta curva será $\sinh(1)$ ya que es creciente en este intervalo.
• $|\sin(\gamma_3(t))| = \sqrt{\sin^2(t) + \sinh^2(1)}$ el máximo en esta curva será cuando el seno alcance su máximo, es decir $\sqrt{1 + \sinh^2(1)} = \sqrt{\cosh^2(1)} = \cosh(1)$.
• $|\sin(\gamma_4(t))| = \sqrt{\sin^2(0) + \sinh^2(t)} = \sinh(t)$ el máximo en esta curva será $\sinh(1)$.

Por lo tanto, el máximo es $\cosh(1)$.

■

Problema 5.
(*i*) *Demostrar que si f es entera y $\operatorname{Re} f$ es acotada, entonces f es constante.*
(*ii*) *Demostrar que si $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{C},\mathbb{R})$ es acotada en todo $\mathbb{C}$, entonces u es constante.*

Demostración. –

(*i*) Consideremos a $f = u + iv$ y sea $g(z) = \exp(f(z))$, por la regla de la cadena tendremos que esta es una función entera y además

$$|g(z)| = |\exp(f(z))| = \left|e^{u+iv}\right| = e^u$$

Pero como por hipótesis $\operatorname{Re} f = u$ es acotada, tendremos que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $u \leq M$, de donde

$$|g(z)| = e^u \leq e^M$$

por lo tanto tenemos que g es una función que es a la vez entera y acotada, por tanto por el teorema de Liouville la función debe de ser constante, es decir, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = w \iff \exp(f(z)) = w \iff f(z) = \log(w) \in \mathbb{C}$$

por lo cual f es constante.

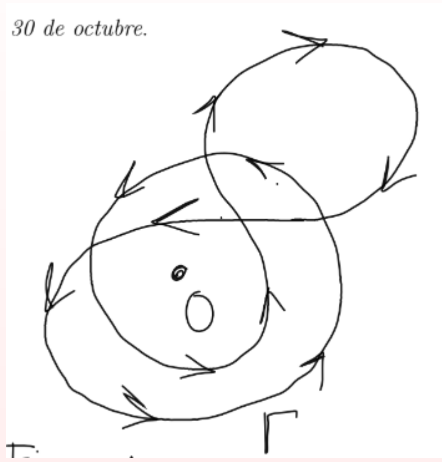
(*ii*) Dado que u es harmónica, sabemos que existirá su conjugada armónica v tal que la función $f = u + iv$ es analítica (en $\mathbb{C}$), por lo cual tenemos una función entera tal que su parte real (u) es acotada, y aplicando el inciso (i) tendremos que f es constante. De donde concluimos el resultado.

■

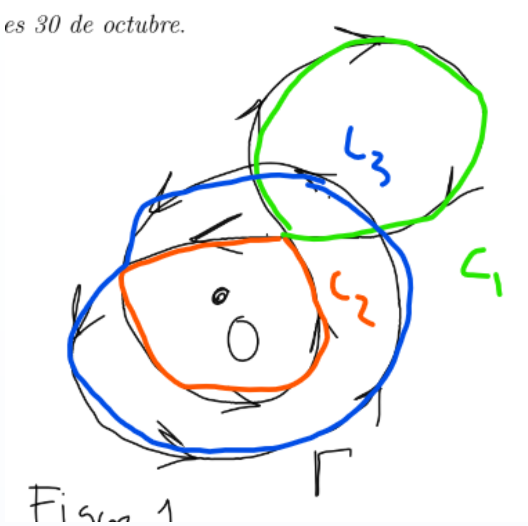
Problema 6. *Evalué*

$$\int_\Gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz$$

donde Γ *es la curva siguiente:*



Solución. – Consideremos la cadena formada por los ciclos C_1, C_2 y C_3 como en la imagen:



entonces, por el teorema de Cauchy versión homologa tendremos que (con $f(z) = e^z - e^{-z}$)

$$\int_\Gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z^4}\, dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z^4}\, dz + \int_{C_3} \frac{f(z)}{z^4}\, dz$$

$$= f^{(3)}(0) I_{C_1}(0) \frac{2\pi i}{3!} + f^{(3)}(0) I_{C_2}(0) \frac{2\pi i}{3!} + f^{(3)}(0) I_{C_3}(0) \frac{2\pi i}{3!}$$

$$= f^{(3)}(0)[0] \frac{2\pi i}{3!} + f^{(3)}(0)[1] \frac{2\pi i}{3!} + f^{(3)}(0)[1] \frac{2\pi i}{3!}$$

$$= 2 f^{(3)}(0) \frac{2\pi i}{3!} = \frac{2\pi i}{3} f^{(3)}(0)$$

donde $f^{(3)}(z) = e^z + e^{-z} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$, por lo tanto

$$\int_\Gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3} f^{(3)}(0) = \frac{4\pi i}{3}$$

■

Problema 8. *Sea Ω abierto del plano, y γ una curva en Ω. Denotemos por γ^* la traza de γ. Suponga que $\phi : \Omega \times \gamma^* \to \mathbb{C}$, es holomorfa en la primera variable y continua en la segunda. Defina*

$$\Phi(z) := \int_\gamma \phi(z,\xi) d\xi, \quad z \in \Omega$$

Demostrar que Φ es holomorfa y que

$$\Phi'(z) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} \phi(z,\xi) d\xi$$

Demostración. –

(i) Consideremos Γ curva de C^1 a trozos contenida en Ω, entonces como por hipótesis la función $\Phi(z)$ es continua y además

$$\int_\Gamma \Phi(z) dz = \int_\Gamma \left(\int_\gamma \phi(z,\xi) d\xi \right) dz$$

entonces por el teorema de Fubini

$$\int_\Gamma \Phi(z) dz = \int_\gamma \left(\int_\Gamma \phi(z,\xi) dz \right) d\xi$$

y dado que ϕ es holomorfa en la primera variable y $\Gamma \subset \Omega$, por el teorema de Cauchy

$$\int_\Gamma \Phi(z) dz = \int_\gamma (0)\, d\xi = 0$$

por lo tanto, por el teorema de Morera la función es holomorfa.

(ii) Ahora, dado que la función es holomorfa, tendemos por la formula integral de Cauchy

$$\begin{aligned}\Phi'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\Phi(s)}{(s-z)^2} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{(s-z)^2} \left(\int_\gamma \phi(s,\xi) d\xi \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_\gamma \frac{1}{(s-z)^2} \phi(s,\xi) d\xi ds\end{aligned}$$

Y nuevamente por Fubini

$$
\begin{aligned}
\Phi'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_\Gamma \frac{1}{(s-z)^2}\phi(s,\xi)\,ds\,d\xi = \int_\gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(s,\xi)}{(z-s)^2}\,ds\right)d\xi \\
&= \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}\phi(z,\xi)\,d\xi
\end{aligned}
$$

■