Análisis Complejo

Tarea 5

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Calcular la serie de Laurent de las siguientes funciones en los anillos indicados:*

(a) $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$ *para* $1 < |z| < \infty$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ *para* $1 < |z| < 2$

Solución. –

(a) Desarrollando

$$f(z) = \frac{z}{z+1} = z\frac{1}{1+z} = z\frac{1}{z[\frac{1}{z}+1]} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})}$$

y como consideramos $1 < |z| < \infty$, entonces $\left|-\frac{1}{z}\right| < 1$ por lo que

$$f(z) = \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

(b) Desarrollando

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}-1}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

y como consideramos $1 < |z| < 2$, entonces $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ y $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ por lo que

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^n + \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$$

■

Problema 2. *Calcular el residuo de las siguientes funciones en los puntos indicados. Indicar también el orden del polo:*

(a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin(z)}$ *en* $z = 0$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$ *en* $z = 1$

Solución. –

(a) Notemos que es una singularidad removible pues

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{\sin(z)} \underset{\text{L`Hopital}}{=} \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{\cos(z)} = \frac{1}{1} = 1$$

por tanto, el residuo es 0.

(b) Notemos que la función $g(z) = e^{-z^2}(z-1)^2$ tiene cero de orden 2 en $z = 1$, pues $g(1) = 0$,

$$g'(z) = -2ze^{-z^2}(z-1)^2 + 2e^{-z^2}(z-1) \Rightarrow g'(1) = 0$$
$$g''(z) = h_1(z)(z-1)^2 + h_2(z)(z-1) + 2e^{-z^2} \Rightarrow g''(1) = 2e^{-1} \neq 0$$

por lo que es cero de orden 2, y entonces $1/g(z) = f(z)$ tiene un polo de orden dos en $z = 1$. De esta manera el residuo vendrá dado por

$$\operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(f(z)(z-1)^2\right) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(e^{z^2}\right) = \lim_{z\to 1} 2ze^{z^2} = 2e$$

■

Problema 3. *Sea* P *un polinomio real con grado* $P \geq 1$ *y que no tiene ceros reales. Sea* $0 < \alpha < 1$. *Demostrar la siguiente formula para la transformada de Mellin:*

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}}\sum_{a\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)};a\right)$$

donde se esta tomando la rama $(0, 2\pi]$ *del argumento.*

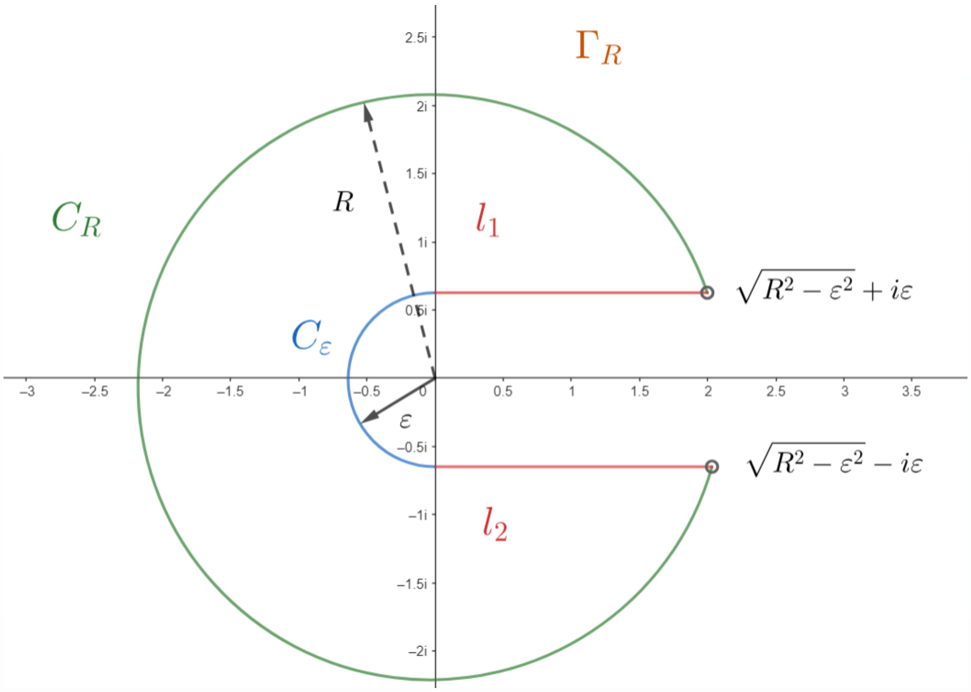
Demostración. – Consideremos el siguiente contorno: $\Gamma_{R,\varepsilon} := l_2 + C_\varepsilon + l_1 + C_R$ con

$l_2 = [\sqrt{R^2-\varepsilon^2} - i\varepsilon, -i\varepsilon]$

C_ε = circunferencia de $-i\varepsilon$ a $i\varepsilon$

$l_1 = [i\varepsilon, \sqrt{R^2-\varepsilon^2} + i\varepsilon]$

C_ε = circunferencia de $\sqrt{R^2-\varepsilon^2} + i\varepsilon$ a $\sqrt{R^2-\varepsilon^2} - i\varepsilon$



Con ello tendremos que

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)};a\right)$$

pero, por otro lado

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}\left[\int_{l_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \int_{l_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right]\\ &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{l_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{l_1} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\end{aligned}$$

Ahora trabajemos con cada integral.

- Sobre C_ε: En este caso notemos

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right| \le \int_{C_\varepsilon} \left|\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\right||dz| = \int_{C_\varepsilon} \frac{|z|^{\alpha-1}}{|P(z)|}|dz| = \int_{C_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{|P(z)|}|dz|$$

y como $P(z)$ no tiene ceros reales, entonces $1/P(z)$ será continua en una vecindad suficientemente pequeña del origen, por lo que para ε suficientemente pequeño la función será acotada, es decir

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right| \leq \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{|P(z)|}\varepsilon^{\alpha-1}|dz| \leq \int_{C_\varepsilon} A\varepsilon^{\alpha-1}|dz| \leq A\varepsilon^{\alpha-1}\pi\varepsilon = A\pi\varepsilon^{\alpha}$$

y por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} A\pi\varepsilon^{\alpha} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz = 0$$

- Sobre C_R: En este caso notemos haciendo algo similar al caso anterior

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{R^{\alpha-1}}{|P(z)|}|dz|$$

y como $P(z)$ es un polinomio de grado al menos 1, tendremos que para R suficientemente grande existirá $C > 0$ tal que $\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|}$, de donde

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{1}{|P(z)|}R^{\alpha-1}|dz| \leq \int_{C_R} \frac{C}{|z|}R^{\alpha-1}|dz| = \int_{C_R} \frac{C}{R}R^{\alpha-1}|dz| \leq CR^{\alpha-2}2\pi R = 2\pi CR^{\alpha-1}$$

y por lo tanto

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi CR^{\alpha-1} \underset{\alpha-1<0}{=} 0 \quad \therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz = 0$$

- Sobre l_1: Desarrollando

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{l_1} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}}\int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{(t+i\varepsilon)^{\alpha-1}}{P(t+i\varepsilon)}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{t^{\alpha-1}}{P(t)}\,dt = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx$$

pues ya que $\arg(t+i\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

- Sobre l_2: Desarrollando

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{l_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}^0 \frac{(t-i\varepsilon)^{\alpha-1}}{P(t-i\varepsilon)}\,dt = \lim_{R\to\infty} -\int_0^R \frac{t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}}{P(t)}\,dt = -e^{2\pi i(\alpha-1)}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx$$

pues ya que $\arg(t-i\varepsilon) \to 2\pi$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Por lo tanto por todo lo anterior.

$$2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)};a\right) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to0^+}} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to0^+}} \int_{l_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \cancel{\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz} + \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to0^+}} \int_{l_1} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz + \cancel{\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}\,dz}$$

$$= -e^{2\pi i(\alpha-1)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx + \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx = (1-e^{2\pi i(\alpha-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx$$

por lo que

$$(1-e^{2\pi i(\alpha-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)};a\right)$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)}\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i(\alpha-1)}} \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)};a\right)$$

■

Problema 4. *Evaluar las siguientes integrales:*

(*a*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4}$

(*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^4}\,dx$ *con* $a>0$

Solución. –

(*a*) Notemos que el polinomio del denominador es ≥ 2 al grado del polinomio del numerador y además $Q(x) = x^2-2x+4$ no tiene raíces reales (sus raíces son $x = 1 \pm i\sqrt{3}$) , por lo que según lo desarrollado en clase la integral existe y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4} = 2\pi i \sum_{w\in H^+} \operatorname{Res}(\frac{1}{z^2-2z+4}, w)$$

donde tendremos que la función tendrá dos polos simples y donde solo el polo $z = 1+i\sqrt{3}$ esta en el semiplano superior, por lo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4} = 2\pi i \operatorname{Res}(\frac{1}{z^2-2z+4}, 1+i\sqrt{3}) = 2\pi i \lim_{z\to1+i\sqrt{3}} \frac{(z-1-i\sqrt{3})}{z^2-2z+4}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to1+i\sqrt{3}} \frac{(z-1-i\sqrt{3})}{(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})} = 2\pi i \lim_{z\to1+i\sqrt{3}} \frac{1}{z-1+i\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}} = 2\pi i \frac{1}{i2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(b) Desarrollando, podemos notar que el integrando es una función par, por lo que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^4} dx \underset{\substack{t=ax \\ a>0}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{1 + (\frac{t}{a})^4} \frac{1}{a} dt = \frac{a^4}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{a^4 + t^4} dt = \frac{a^3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{a^4 + t^4} dt$$

por tanto, tenemos una integral de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cos(t) dt$ donde los ceros de Q son tales que

$$t^4 + a^4 = 0 \Rightarrow t^4 = -a^4 \underset{a>0}{\Rightarrow} t = ae^{i(\pi/4 + 2\pi k/4)}, \ k = 0,1,2,3$$

es decir $t_0 = a(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}),\ t_1 = a(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}),\ t_2 = a(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}),\ t_3 = a(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$, por lo que no tiene ceros reales y además el grado de Q menos el grado de P es ≥ 1, por tanto, por lo visto en clase

$$\frac{a^3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{a^4 + t^4} dt = \frac{a^3}{2} \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{w \in H^+} \mathrm{Res}(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w)\right]$$

pero los únicos polos en el semiplano superior son t_0 y t_1 siendo polos simples, por tanto dado que el numerador no se anula en estos puntos y son ceros simples de Q tendremos que los residuos serán

$$\mathrm{Res}(\frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}, t_k) = \frac{P(t_k)e^{it_k}}{Q'(t_k)} = \frac{e^{it_k}}{4{t_k}^3}$$

de donde

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^4} dx = \frac{a^3}{2} \mathrm{Re}\left[2\pi i \left(\frac{e^{it_0}}{4{t_0}^3} + \frac{e^{it_1}}{4{t_1}^3}\right)\right] = \frac{a^3\pi}{4} \mathrm{Re}\left[i\left(\frac{e^{t_1}}{{t_0}^3} + \frac{e^{t_2}}{{t_1}^3}\right)\right]$$

pero ${t_0}^3 = a^2 t_1$ y ${t_1}^3 = a^2 t_0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^4} dx = \frac{a^3\pi}{4} \mathrm{Re}\left[i\left(\frac{e^{t_1}}{a^2 t_1} + \frac{e^{t_2}}{a^2 t_0}\right)\right] = -\frac{a\pi}{4} \mathrm{Im}\left[\frac{e^{t_1}}{t_1} + \frac{e^{t_2}}{t_0}\right]$$

donde

$$\frac{e^{t_1}}{t_1} + \frac{e^{t_2}}{t_0} = \frac{1}{t_1}e^{t_1} + \frac{1}{t_0}e^{t_2} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}i} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}i}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{\frac{a}{\sqrt{2}}i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}i}\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)e^{\frac{a}{\sqrt{2}}i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}i}\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)\left(\cos(\frac{a}{\sqrt{2}}) + i\sin(\frac{a}{\sqrt{2}})\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)\left(\cos(\frac{a}{\sqrt{2}}) - i\sin(\frac{a}{\sqrt{2}})\right)\right]$$

entonces

$$\mathrm{Im}\left[\frac{e^{t_1}}{t_1} + \frac{e^{t_2}}{t_0}\right] = \frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{a}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{a}{\sqrt{2}})\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) - \frac{2}{\sqrt{2}}\cos(\frac{a}{\sqrt{2}})\right] = -\frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{a}{\sqrt{2}})\right]$$

por lo que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^4}\,dx = -\frac{a\pi}{4}\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{t_1}}{t_1} + \frac{e^{t_2}}{t_0}\right] = -\frac{a\pi}{4}\left(-\frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{a}{\sqrt{2}})\right]\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{a}{\sqrt{2}})\right]$$

por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{a}{\sqrt{2}})\right]$$

$\blacksquare$

Problema 5. *Sea* Ω *abierto y* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ *. Sea* z_0 *un cero de f con multiplicidad* m_0 *, y tome* $C_R = \partial B(z_0, R)$ *de tal suerte que* $\overline{B}(z_0, R) \subset \Omega$ *no contiene otros ceros de f. Demostrar que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = m_0 z_0$$

Demostración. – Como f es holomorfa en Ω tendremos que no nos aportara ninguna singularidad, por otro lado dadas las hipótesis el único cero de f en $\overline{B}(z_0, R)$ es z_0 por lo que la función $zf'(z)/f(z)$ únicamente tiene un polo en z_0 en $\overline{B}(z_0, R)$. Además notemos que como z_0 es cero de orden m_0 de f entonces es cero de orden $m_0 - 1$ de f', por lo que z_0 es un polo simple de $f'(z)/f(z)$ y por ende de $zf'(z)/f(z)$ (a menos que $z_0 = 0$, pero en ese caso la función $zf'(z)/f(z)$ seria esencialmente analítica, por lo que la integral nos daría cero y quedaría probado, por ello supongamos $z_0 \neq 0$), de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Res}(\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0)$$

pero por lo visto en clase si llamamos $g(z) = zf'(z)$ entonces

$$\mathrm{Res}(\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0) = \mathrm{Res}(\frac{g(z)}{f(z)}, z_0) = m_0 \frac{g^{(m_0-1)}(z_0)}{f^{(m_0)}(z_0)}$$

pero por la regla de Leibniz

$$\begin{aligned} g^{(m_0-1)}(z_0) &= (z \cdot f'(z))^{(m_0-1)} \big|_{z=z_0} = \sum_{k=0}^{m_0-1} \binom{m_0-1}{k} f^{(m_0-k)}(z) Id^{(k)}(z) \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{m_0-1}{k} f^{(m_0-k)}(z) Id^{(k)}(z) \big|_{z=z_0} \\ &= \binom{m_0-1}{0} f^{(m_0)}(z)z + \binom{m_0-1}{1} f^{(m_0-1)}(z) \big|_{z=z_0} \\ &= f^{(m_0)}(z_0)z_0 + (m_0-1)\cancel{f^{(m_0-1)}(z_0)} = f^{(m_0)}(z_0)z_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathrm{Res}(\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0) = m_0 \frac{f^{(m_0)}(z_0)z_0}{f^{(m_0)}(z_0)} \underset{f^{(m_0)}(z_0)\neq 0}{=} m_0 z_0$$

por lo tanto $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = m_0 z_0$.

∎

Problema 6. *Sea $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ tal que $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = \infty$. Demostrar que f es un polinomio.*

Demostración. – Consideremos $g(z) = \dfrac{1}{f(1/z)}$, notemos que dado $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = \infty$ entonces $\lim_{z \to 0} f(1/z) = \infty$, por lo que

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

entonces tendremos una singularidad removible en $z = 0$ para $g(z)$, por lo que es esencialmente analítica en 0. Ahora sea m el orden del cero de g en $z = 0$, por lo que entonces la función $1/g(z) = f(1/z)$ tendrá un polo de orden m en $z = 0$.

Ahora, dado que f es entera, su serie de Laurent no tendrá parte singular, es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \Rightarrow \quad f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

pero como $f(1/z)$ tiene polo de orden m en $z = 0$, entonces necesariamente $a_n = 0 \ \forall n > m$, entonces

$$f(1/z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{z^n} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$$

por tanto, es un polinomio.

■

Problema 7. *Sea $p(z) = z^n + q(z)$, con q un polinomio no constante de grado a lo mas $n-1$. Demostrar que existe ζ_0 con $|\zeta_0| = 1$ tal que $|p(\zeta_0)| > 1$.*

Demostración. – Por contradicción, supongamos que $|p(z)| \le 1$ para toda $|z| = 1$. Entonces esto implica que $|z^n + q(z)| \le 1, \ \forall |z| = 1$, pero por la desigualdad del triángulo tendremos que

$$|z^n + q(z)| \ge |q(z)| - |z^n| = |q(z)| - |z|^n$$

por lo que para toda $|z| = 1$

$$|q(z)| - |z|^n \le 1 \ \Rightarrow \ |q(z)| - 1 \le 1 \ \Rightarrow \ |q(z)| \le 0 \ \Rightarrow \ q(z) = 0 \ \forall |z| = 1!!!$$

pero esto es imposible, pues es un polinomio y únicamente tiene un numero finito de ceros (ya que no es constante), por tanto, debe de existir ζ_0 con $|\zeta_0| = 1$ tal que $|p(\zeta_0)| > 1$.

NOTA: En el problema original como conclusión se pide $|p(\zeta_0)| \geq 1$, pero creo que en realidad debería de ser $|p(\zeta_0)| > 1$ y así lo probe.

■

Problema 8. *Demostrar que la colección de todas las transformaciones de Möbius*

$$\mathfrak{M} = \left\{ T(z) := \frac{az+b}{cz+d} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

forman un grupo bajo la composición de funciones.
Además, si $SL_2(\mathbb{C})$ es el grupo de matrices 2x2 con determinante 1, mostrar que la función

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}$$

es un epimorfismo de grupos. ¿Es esta función un isomorfismo?

Demostración. –

⊙ La operación es cerrada, pues dadas $T_1, T_2 \in \mathfrak{M}$,

$$(T_1 \circ T_2)(z) = \frac{a_1 T_2(z) + b_1}{c_1 T_2(z) + d_1} = \frac{a_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{\dfrac{a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 c_2 z + b_1 d_2}{c_2 z + d_2}}{\dfrac{c_1 a_2 z + c_1 b_2 + d_1 c_2 z + d_1 d_2}{c_2 z + d_2}}$$
$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} \in \mathfrak{M}$$

⊙ La operación es asociativa, pues se hereda de la composición de funciones en general.

⊙ Existe elemento neutro, la transformación identidad $T(z) = z = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$ con $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \neq 0$

⊙ Existen inversas, pues si $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ entonces la función inversa también de es Möbius, pues

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad \Rightarrow \quad wcz + wd = az + b \quad \Rightarrow \quad (wc - a)z = b - wd$$
$$\Rightarrow \quad z = \frac{b - wd}{wc - a} = \frac{(-d)w + b}{cw + (-a)} \quad \therefore \quad T^{-1}(z) = \frac{(-d)z + b}{cz + (-a)}$$

y es tal que $(-d)(-a) - (c)(b) = ad - bc \neq 0$, por lo que es de Möbius también.

Por tanto es un grupo.

Ahora, notemos que

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1d_1 + d_1d_2 \end{pmatrix} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} = f\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

por lo que efectivamente es homomorfismo de grupos, adema para cada $T \in \mathfrak{M}$, si llamamos $k = ad - bc$, entonces la matriz

$$\frac{1}{k}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

y será tal que

$$f\left(\frac{1}{k}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \frac{1}{k}a & \frac{1}{k}b \\ \frac{1}{k}c & \frac{1}{k}d \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{k}az + \frac{1}{k}b}{\frac{1}{k}cz + \frac{1}{k}d} = \frac{az + b}{cz + d}$$

por lo que es sobreyectiva. Sin embargo, no será inyectiva, pues justo en el caso anterior

$$f\left(\frac{1}{k}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{az + b}{cz + d} = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

■

Problema 9. *Encontrar un mapa conforme que mande la banda* $A_\pi := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ *en el disco unitario* $\mathbb{D}$.

Demostración. – Si consideramos la transformación $f(z) = \frac{1}{2}z$, entonces $f[A_\pi] = A_{\pi/2}$, entonces si ahora consideramos $g(z) = \exp(z)$ tendremos que para $z \in A_{\pi/2}$

$$g(z) = g(x + iy) = \exp(x + iy) = e^x e^{iy} \quad \Rightarrow \quad |g(z)| \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \arg(g(z)) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

por lo que $g[A_{\pi/2}] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, y dado que la transformación $T(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$ manda el semiplano derecho al disco unitario, entonces la función buscada será

$$L(z) = T(g(f(z))) = T(g(\frac{1}{2}z)) = T(e^{\frac{1}{2}z}) = \frac{e^{\frac{1}{2}z} - 1}{e^{\frac{1}{2}z} + 1} = \tanh(\frac{1}{4}z)$$

■