Fundamentos de Combinatoria

Tarea Examen Parte 1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1. *Sean* $l, m \geq n$ *tres números naturales. Prueba que*

$$\binom{m}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{l+m-k}{n-k}$$

Demostración – Procederemos por inclusion-exclusion. Consideremos dos conjuntos L y F con l y m elementos respectivamente. Entonces contaremos de dos formas distintas la cantidad de formas de escoger un subconjunto de tamaño n de la unión, donde no tenga ningún elemento de L. De forma clara esta cantidad es $\binom{m}{n}$ ya que no tomamos ningún elemento de L por lo que serán únicamente subconjuntos de F. Ahora volveremos a contar, pero con el principio de inclusión-exclusion.

Consideremos $X = \{S \subseteq L \cup F : |S| = n\}$ nuestro universo y para cada $l_i \in L$ definiremos nuestra familia como $A_i = \{S \in X : l_i \in S\}$, de donde

$$\binom{m}{n} = \left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{l} A_i \right) \right| = \sum_{I \subseteq [l]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

ahora, para cada tamaño fijo $|I| = k$ queremos saber la cantidad de subconjuntos de $L \cup F$ de tamaño n tales que contengan a I, para ello primero se seleccionan los k elementos de I, y como queremos de los restantes $l + m - k$ elementos escogemos un subconjunto de $n - k$ elementos, por lo que habrá

$$\binom{l+m-k}{n-k}$$

por lo que, dado que queremos subconjuntos de n elementos basta considerar $k \leq n$

$$\left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{l} A_i \right) \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{l+m-k}{n-k}$$

$\blacksquare$

Problema 2. *Sean* $A_1, \ldots, A_6 \subseteq [200]$ *tales que* $|A_i| \geq 120$ *para* $i = 1, \ldots, 6$. *Prueba que existen* $x, y \in [200]$ *tales que* $\{x, y\} \cap A_i \neq \emptyset$ *para toda* $i = 1, \ldots, 6$

Demostración. – Como cada subconjunto tiene al menos 120 elementos, podemos pensar en que cada A_i´s es la imagen de una una función (inyectiva) que va de al menos el conjunto $[120]$ a $[200]$ por lo que la unión de todas ellas será la imagen de una función de $[720]$ a $[200]$ (pues $6 \times 120 = 720$), pero dado que $720 / 200 = 3.6 > 3$ entonces necesariamente tiene que haber x tal que es imagen de al menos 4 elementos del dominio. De donde si seleccionamos los otros dos conjuntos restantes y dos de los que ya tenia, obtenemos el segundo punto y, por lo que estos dos puntos cumplen que al menos uno de los dos esta en todos los A_i.

■

Problema 4. *Fijemos* $q = p^k$ *con* p *primo y* $k \geq 1$. *Sea* I_n *el numero de polinomios irreducibles de grado* n *en* $F_q[x]$. *Demuestre que*

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$$

Demostración. – Usando la sugerencia, donde se usa el hecho de que la factorización de polinomios monico en irreducibles monico es única, tenemos que podremos expresar a función generadora de los polinomios monico como (contando multiplicidades)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^n}\right)^{I_n}$$

de donde sacando logaritmo de ambos lados obtenemos

$$\frac{1}{1 - qt} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^n}\right)^{I_n}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{1 - qt}\right) = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^n}\right)^{I_n} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \log\left(\frac{1}{1 - t^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{nk}}{k}$$

y aquí en vez de sumar sobre los nk sumo sobre todos los posibles múltiplos, por lo que tomo $m = nk$ de 1 hasta el infinito, por lo que

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{1 - qt}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n|m} \frac{I_n}{m/n} t^m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n|m} \frac{n I_n}{m} t^m$$

y por el lado izquierdo

$$\log\left(\frac{1}{1-qt}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{m} t^m$$

de donde

$$\frac{q^m}{m} = \sum_{n|m} \frac{nI_n}{m} = \frac{1}{m}\sum_{n|m} nI_n \quad \Rightarrow \quad q^m = \sum_{n|m} nI_n$$

por lo que usando la formula de inversión obtenemos

$$\frac{q^m}{m} = \sum_{n|m} \frac{nI_n}{m} = \frac{1}{m}\sum_{n|m} nI_n \quad \Rightarrow \quad nI_n = \sum_{d|n} \mu(\tfrac{n}{d}) q^d$$

donde concluimos despejando.

■

Problema 5. *Sea F una familia de subconjuntos de [n] tales que para cualesquiera $A, B \in F$ con $A \neq B$ se tiene que $\left|A \cap B\right| = 1$. Prueba que $\left|F\right| \leq n$*

Demostración. – Llamemos $\left|F\right| = m$, y sea $(M_{i,j})_{i,j}$ una matriz de $m \times n$ tal que

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in A_i \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

de donde tendremos que por hipótesis que para $i \neq j$, $M_i \bullet M_j = \left|A_i \cap A_j\right| = 1$ y $M_i \bullet M_i = \left|A_i\right| \geq 1$. Asi sea $L := M \cdot M^T$, por lo que de lo anterior sabremos que L se vera:

$$L = \begin{pmatrix} \left|A_1\right| & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \left|A_1\right| & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \left|A_m\right| \end{pmatrix}$$

Finalmente, veamos que el rango lo podemos acotar por arriba y por abajo. Primero se tiene que

$$\text{Ran}(L) = \text{Ran}(MM^T) \leq \text{Ran}(M) \leq n$$

Y por otro lado

$$\mathrm{Ran}(L) = \sum_{i=1}^{m} |A_i| \geq \sum_{i=1}^{m} 1 = m$$

de donde concluimos que $m \leq n$.

$\blacksquare$

Problema 13. *Demuestre que*

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$$

Demostración. – Por inducción sobre n. Para $n = 0$ es inmediato. Supongamos que es valido para $n > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} &= \binom{n+1}{n+1} x^{\overline{n+1}} y^{\overline{0}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} \\
&= x^{\overline{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} \\
&= x^{\overline{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} \\
&= x^{\overline{n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{\overline{k+1}} y^{\overline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k+1}} y^{\overline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n+1-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+1)^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y(y+1)^{\overline{n-k}} \\
&\underset{\text{H.I}}{=} x(x+1+y)^{\overline{n}} + y(x+y+1)^{\overline{n}} = (x+y)(x+y+1)^{\overline{n}} = (x+y)^{\overline{n+1}}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Problema 15. *Sea* $f_n(x) := (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^3$. *Prueba que* $[x^{2n+1}]f_n(x) = [x^{2n-2}]f_{n-1}(x)$.

Demostración. – Dadas las propiedades de los coeficientes binomiales sabemos que son simétricos en los extremos, es decir

$$[x^k]f_n(x) = [x^{3n-k}]f_n(x)$$

Pero notemos que entonces

$$[x^{2n+1}]f_n(x) = [x^{3n-(2n+1)}]f_n(x) = [x^{n-1}]f_n(x)$$

Y

$$[x^{2n-2}]f_{n-1}(x) = [x^{3(n-1)-(2n-2)}]f_{n-1}(x) = [x^{n-1}]f_{n-1}(x)$$

entonces nos será más fácil probar que

$$[x^{n-1}]f_n(x) = [x^{n-1}]f_{n-1}(x)$$

Esto será fácil de ver viendo la relación de recurrencia que cumplirá nuestra función, tenemos que

$$f_n(x) = A_n(x)^3 = \left[A_{n-1}(x) + x^n\right]^3 = A_{n-1}(x)^3 + 3A_{n-1}(x)^2x^n + 3A_{n-1}(x)x^{2n} + x^{3n}$$

por lo que dado que todos los polinomios tienen al menos potencia x^n el único que queda sera:

$$[x^{n-1}]f_n(x) = [x^{n-1}]A_{n-1}(x)^3 = [x^{n-2}]f_{n-1}(x)$$

■