Fundamentos de Combinatoria

Tarea Examen Parte 2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 6. *Sea F una familia de subconjuntos de $[n]$ tales que toda $A \in F$ tiene cardinalidad impar y cualesquiera $A, B \in F$ con $A \neq B$ se tiene que $\left|A \cap B\right|$ es par. Prueba que $\left|F\right| \leq n$.*

Demostración – Como vimos en clase, basta probar que $\left\{e_A : A \in F\right\}$ es linealmente independiente. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_k \in F$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k} e_{A_i} = 0$$

entonces para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tendremos

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{k} e_{A_i}\right) \cdot e_{A_j} = \sum_{i=1}^{k} e_{A_i} \cdot e_{A_j}$$

pero como por hipótesis $\left|A_i \cap A_j\right| = 0 \pmod 2$ para $A_i \neq A_j \iff i \neq j$ entonces del sumando de la derecha únicamente sobreviven $i = j$, por lo que

$$A_j \cdot A_j = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\} \implies 1 = 0 \pmod 2 \text{ !!}$$

Por lo tanto tiene que ser linealmente independiente, de donde $\left|F\right| \leq n$

■

Problema 7. *Prueba que la función de Möbius en el producto de conjuntos parcialmente ordenados cumple:*

$$\mu_{P\times Q}((a,b),(x,y)) = \mu_P(a,x)\mu_Q(b,y)$$

Demostración –

• Si $(a,b) \not\leq (x,y) \iff a \not\leq x$ o $b \not\leq y$ por ser ordenes parciales, supongamos spdg que $a \not\leq x$ entonces $\mu_P(a,x) = 0$ de donde $\mu_P(a,x)\mu_Q(b,y) = 0$

• Si $(a,b) = (x,y) \iff a = x \wedge b = y$ por ser ordenes parciales entonces $\mu_P(a,x) = \mu_P(a,a) = 1$ y también $\mu_Q(b,y) = \mu_Q(b,b) = 1$ de donde $\mu_P(a,x)\mu_Q(b,y) = 1$

• Si $(a,b) < (x,y) \iff a < x \wedge b < y$ por ser ordenes parciales entonces dado que son funciones de Möbius se tiene que

$$\sum_{a\leq p\leq x} \mu_P(a,p) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{b\leq q\leq y} \mu_Q(b,q) = 0$$

por lo que

$$\left(\sum_{a\leq p\leq x} \mu_P(a,p)\right)\left(\sum_{b\leq q\leq y} \mu_Q(b,q)\right) = \sum_{a\leq p\leq x}\sum_{b\leq q\leq y} \mu_P(a,p)\mu_Q(b,q) = 0$$

sin embargo, dado que el orden producto es tal que $(a,b) \leq (x,y) \iff a \leq x \wedge b \leq y$ en estos productos estamos sumando sobre todos los posibles puntos medios de (a,b) y (x,y) de modo que

$$0 = \sum_{a\leq p\leq x}\sum_{b\leq q\leq y} \mu_P(a,p)\mu_Q(b,q) = \sum_{(a,b)\leq(p,q)\leq(x,y)} \mu_P(a,p)\mu_Q(b,q)$$

por lo tanto, de los tres puntos anteriores $\mu_{P\times Q}((a,b),(x,y)) = \mu_P(a,x)\mu_Q(b,y)$

■

Problema 11. *Prueba que si un conjunto parcialmente ordenado P tiene una unica extensión a un orden total, entonces P es un orden total.*

Demostración – En efecto por contradicción supongamos que P no es un orden total, entonces deben de existir dos elementos al menos dos elementos $p, q \in P$ distintos tales que no son comparables, es decir, $p \nleq q$ y $q \nleq p$, con ello podemos construir dos ordenes totales distintos, pues podemos preservar todos los órdenes que ya teníamos pero agregar $p \leq q$ o $q \leq p$, pero esto contradice que exista una única extensión a un orden total. Por lo tanto, P tiene que ser orden total.

■

Problema 14. *Encuentra la función generatriz exponencial del numero de involuciones en* S_n

Demostración – Una involución es tal que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ por lo que si tomamos un valor $k \in [n]$ entonces $\sigma(\sigma(k)) = k$ de donde a lo mas cada ciclo de la permutación debe tener tamaño 2. Entonces una involución no es mas que un conjunto de ciclos de tamaño a lo mas 2, usando especies esto es:

$$I = E \circ C_{\leq 2}$$

de donde

$$I(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$$

■

Problema 16. *Encuentra una prueba inyectiva de la desigualdad*

$$k(k-1) \leq \binom{2k-1}{k-1}$$

Demostración – Consideremos los conjuntos $L = \left\{(n,m) \in [k]^2 : x \neq y\right\}$ y $F = \binom{[2k-1]}{k-1}$ lo cuales tienen cardinalidad $k(k-1)$ y $\binom{2k-1}{k-1}$ respectivamente. Ahora sea $f : L \to F$ dada por

$$f(n,m) := C_{n,m} := \left\{1,2,\ldots,k-1,k+n\right\} \setminus \left\{m\right\}$$

que efectivamente, esta bien definida pues $C_{n,m} \subset [2k-1]$ y $\left|C_{n,m}\right| = k-1$ ya que tanto $1 \leq n,m \leq k$. Y en el caso extremo en que $n = k-1$ y $m = k$ también tenemos únicamente $k-1$ elementos, esto debido a que $n \neq m$. Veamos que efectivamente es inyectiva.

Sean $(n,m),(a,b) \in L$ tales que $f(n,m) = f(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad C_{n,m} = C_{a,b}$ de donde

$$\left\{1,2,\ldots,k-1,k+n\right\} \setminus \left\{m\right\} = \left\{1,2,\ldots,k-1,k+a\right\} \setminus \left\{b\right\}$$

y de aquí, dado que $k+n$ es el mayor elemento en la izquierda, la única forma en que sean iguales es que $a = n$ y en tal caso también necesariamente se debe de tener que $m = b$ si no, habría un elemento menos en un lado que en el otro, por lo que $(n,m) = (a,b)$, es decir, es inyectiva, y por tanto

$$\left|L\right| \leq \left|F\right| \quad \Leftrightarrow \quad k(k-1) \leq \binom{2k-1}{k-1}$$

■

Problema 17.

Demostración – El diagrama de Hasse lo podemos escribir simplificado de la siguiente manera:

$$[1234, 2134, 2314, 2341]$$
$$[1243, 2143, 2413, 2431]$$
$$[1324, 3124, 3214, 3421]$$
$$[1342, 3142, 3412, 3241]$$
$$[1423, 4123, 4213, 4231]$$
$$[1432, 4132, 4312, 4321]$$

donde cada elemento de una columna es incomparable con todos los de las de esa columna ya que el numero 1 está en la misma posición, además cada elemento de cada columna es menor a todos los demás de las columnas a su derecha ya que el numero 1 tiene una posición mayor. Por tanto cada columna es una anti cadena máxima de tamaño 6, e igualmente la partición minima de cadenas será de tamaño 6 siendo los renglones, esto por el teorema de Dilworth.

■