Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo I.1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1.2. Construya una tabla que represente la suma de todos los elementos de $\mathbb{Z}_5$.

Solución. – En este caso la tabla quedara de la siguiente manera:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Problema 1.6. Sea S_n el conjunto de las permutaciones de un conjunto con n elementos. Calcule el numero de elementos de S_n.

Solución. – Dados n elementos, las formas de las permutaciones posibles serán: Primero se escoge un elemento, donde hay n opciones, luego para el segundo elemento tenemos $n-1$ opciones para elegir y así sucesivamente, teniendo pues un total de $n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ permutaciones. ■

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo I.2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 2.3. Compruebe que los conjuntos con sus operaciones binarias respectivas en el Ejemplo 2.3 son efectivamente álgebras.

Solución. – En efecto, esto es inmediato pues dado por algebra lineal sabemos que tanto las matrices, los polinomios y el campo mismo son espacios vectoriales sobre el mismo campo.

■

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo I.3

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 3.3. Pruebe que si $xy = yx$ en un grupo G, entonces $(xy)^n = x^n y^n$.

Demostración. – Consideremos un grupo $(G,\cdot)$ y elementos $x,y \in G$ tales que $xy = yx$, entonces primeramente notemos que se cumple que $xy^n = y^n x, \ \forall n$. En efecto:

$$xy^n = (xy)y^{n-1} \underset{hip}{=} yxy^{n-1} = y(xy)y^{n-2} \underset{hip}{=} yyxy^{n-2} = y^2xy^{n-2} = \ldots = y^n x$$

Por lo tanto, procediendo por inducción, tenemos que para $n = 2$

$$(xy)^2 = (xy)(xy) \underset{hip}{=} (xy)(yx) \underset{propiedad}{=} x(y^2x) = x(xy^2) = x^2y^2$$

de modo que si suponemos que es válido para $k > 2$ tendremos

$$(xy)^{k+1} = (xy)^k(xy) \underset{hip}{=} x^ky^k(xy) \underset{hip}{=} x^ky^k(yx) = x^k(y^{k+1}x) \underset{hip}{=} x^k(xy^{k+1}) = x^{k+1}y^{k+1}$$

por lo tanto, por inducción matemática queda probado. ■

Problema 3.7. Escriba las tablas de multiplicar de los grupos diédricos D_3 y D_4.

Solución. – Primero consideremos R_0 la identidad (no hacer nada) y sean R_1 y R_2 las rotaciones por 120º y 240º respectivamente, además también sean S_0, S_1 y S_2 las reflexiones respecto a las diagonales del triángulo. Entonces su multiplicación será:

*	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_0	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_1	R_1	R_2	R_0	S_1	S_2	S_0
R_2	R_2	R_0	R_1	S_2	S_0	S_1
S_0	S_0	S_0	S_1	R_0	R_2	R_1
S_1	S_1	S_0	S_2	R_1	R_0	R_2
S_2	S_2	S_1	S_0	R_2	R_1	R_0

Ahora para D_4, consideremos R_0 la identidad (no hacer nada) y sean R_1, R_2 y R_3 las rotaciones por 90º, 180º y 270º respectivamente, además también sean S_0, S_1, S_2 y S_3 las reflexiones respecto al eje vertical y horizontal y las diagonales del cuadrado respectivamente. Entonces su multiplicación será:

*	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	S_3	S_2	S_1	S_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	S_2	S_1	S_0	S_3
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	S_1	S_0	S_3	S_2
S_0	S_0	S_1	S_3	S_2	R_0	R_2	R_1	R_3
S_1	S_1	S_3	S_2	S_0	R_2	R_0	R_3	R_1
S_2	S_2	S_0	S_1	S_3	R_3	R_1	R_0	R_2
S_3	S_3	S_2	S_0	S_1	R_1	R_3	R_2	R_0

Problema 3.11. Establezca, si es posible, homomorfismos no triviales en los siguientes casos.

Solución. –

(i) $1 \to \mathbb{Z}_2$

No es posible dar uno no trivial, dado que solo hay un elemento en el dominio.

(ii) $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$

Consideremos $f(n) = 2n$, entonces en efecto $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ y $f(1) = 2$, de donde $0 = f(0) = f(0 \cdot 1) = f(0)f(1)$, siendo homomorfismo.

(iii) $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$

Consideremos $f(1) = f(3) = 1$ y $f(0) = f(2) = 0$, entonces en estos casos

$$
\begin{aligned}
0 &= f(0) = f(0 \cdot 1) = f(0)f(1) = 0 \cdot 1 = 0\\
0 &= f(0) = f(0 \cdot 2) = f(0)f(2) = 0 \cdot 0 = 0\\
0 &= f(0) = f(0 \cdot 3) = f(0)f(3) = 0 \cdot 1 = 0\\
1 &= f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = 1 \cdot 1 = 1\\
0 &= f(2) = f(1 \cdot 2) = f(1)f(2) = 1 \cdot 0 = 0\\
1 &= f(3) = f(1 \cdot 3) = f(1)f(3) = 1 \cdot 1 = 1\\
0 &= f(0) = f(2 \cdot 2) = f(2)f(2) = 0 \cdot 0 = 0\\
0 &= f(2) = f(2 \cdot 3) = f(2)f(3) = 0 \cdot 1 = 0\\
0 &= f(2) = f(3 \cdot 3) = f(2)f(3) = 0 \cdot 1 = 0
\end{aligned}
$$

por lo que es homomorfismo.

(iv) $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_1$

Solamente será el trivial.

(v) $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Consideremos $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (1,0)$, entonces en este caso $(1,0) = f(1) = f(0+1) = f(0) + f(1) = (0,0) + (1,0) = (1,0)$, por lo que es homomorfismo.

(vi) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$

Consideremos $f(0,0) = f(1,1) = 0$, $f(1,0) = f(0,1)$ entonces

$$
\begin{aligned}
1 &= f(0,1) = f((0,0)+(0,1)) = f(0,0) + f(0,1) = 0 + 1 = 1\\
1 &= f(1,0) = f((0,0)+(1,0)) = f(0,0) + f(1,0) = 0 + 1 = 1\\
0 &= f(1,1) = f((0,0)+(1,1)) = f(0,0) + f(1,1) = 0 + 0 = 0\\
0 &= f(0,0) = f((1,0)+(1,0)) = f(1,0) + f(1,0) = 1 + 1 = 0\\
0 &= f(1,1) = f((1,0)+(0,1)) = f(1,0) + f(0,1) = 1 + 1 = 0\\
1 &= f(0,1) = f((1,0)+(1,1)) = f(1,0) + f(1,1) = 1 + 0 = 1\\
0 &= f(0,0) = f((0,1)+(0,1)) = f(0,1) + f(0,1) = 1 + 1 = 0\\
1 &= f(1,0) = f((0,1)+(1,1)) = f(0,1) + f(1,1) = 1 + 0 = 1\\
0 &= f(0,0) = f((1,1)+(1,1)) = f(1,1) + f(1,1) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

por lo que es homomorfismo.

(vii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$

Consideremos la composición de los homomorfismos de los incisos *iii)* y *v)* el cual será homomorfismo.

■

Problema 3.15. Pruebe el corolario 3.20 sin utilizar la proposición 3.19.

Demostración. – Vamos a probar que el núcleo e imagen son subgrupos de G y G' respectivamente.

(i) $\ker f < G$

Notemos que, por definición del núcleo, $0_G \in \ker f$, además si consideramos $x, y \in \ker G$ tendremos que $f(xy) = f(x)f(y) = 0_{G'}0_{G'} = 0_{G'}$ y $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = {0_{G'}}^{-1} = 0_{G'}$ por lo tanto xy, $y^{-1} \in \ker f$ por lo que es subgrupo.

(i) $\operatorname{im} f < G'$

Notemos que, por definición de homomorfismo, $f(0_G) = 0_{G'}$ $\therefore$ $0_{G'} \in \operatorname{im} f$, además si consideramos $x, y \in \operatorname{im} f$ tendremos que existen x' e y' tales que $f(x') = x$ y $f(y') = y$ por lo que $xy^{-1} = f(x')f(y')^{-1} = f(x')f(y'^{-1}) = f(x'y'^{-1})$ por lo tanto $xy^{-1} \in \operatorname{im} f$ por lo que es subgrupo. ■

Problema 3.19. Sean X, Y y G grupos abelianos. Diremos que $f : X \times Y \to G$ es una función biaditiva, sí $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ y $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$ para $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1 . y_2 \in Y$. Pruebe que

(i) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y)$ para toda $x \in X$, $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(ii) f nunca es inyectiva a menos que $X = Y = \{0\}$

Demostración. –

(i) Sean $x \in X$, $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{Z}$. Tenemos tres casos.

$\lambda = 0$

En este caso, tendremos $f(0 \cdot x, y) = f(0, y)$, sin embargo, notemos que por hipótesis

$$f(0, y) = f(0 + 0, y) = f(0, y) + f(0, y) = 2f(0, y) \iff f(0, y) = 2f(0, y) \iff f(0, y) = 0$$

y de forma análoga $f(x, 0) = 0$, por lo que

$$f(0 \cdot x, y) = f(0, y) = 0 = 0 \cdot f(x, y) = f(x, 0) = f(x, 0 \cdot y)$$

$\lambda > 0$

En este caso, tendremos por definición de la acción que

$$\begin{aligned} f(\lambda x, y) &= f((\lambda - 1)x + x, y) \underset{hip}{=} f((\lambda - 1)x, y) + f(x, y) = f((\lambda - 2)x + x, y) + f(x, y) \\ &\underset{hip}{=} f((\lambda - 2)x, y) + f(x, y) + f(x, y) = f((\lambda - 2)x, y) + 2f(x, y) \\ &\underset{hip}{=} f((\lambda - 3)x, y) + 3f(x, y) = \ldots = f((\lambda - \lambda)x, y) + \lambda f(x, y) = f(0 \cdot x, y) + \lambda f(x, y) \\ &= 0 + \lambda f(x, y) = \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

de forma análoga $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

$\lambda > 0$

Finalmente, este caso se hace de forma igual que el anterior, usando el hecho de que

$$f(-x, y) + f(x, y) = f(-x + x, y) = f(0, y) = 0 \Rightarrow f(-x, y) = -f(x.y)$$

(ii) Supongamos que f es inyectiva, entonces dado que

$$f(x, 0) = f(0, y) \Rightarrow (x, 0) = (0, y) \ \forall x \in X, y \in Y \Rightarrow x = 0 \text{ y } y = 0 \ \forall x \in X, y \in Y$$

por lo que $X = Y = \{0\}$. ■

Problema 3.23. Sea $\varphi : X' \to X$ un homomorfismo de grupos abelianos y $g \in Hom(X,Y)$. Asociemos a g un homomorfismo $f \in Hom(X',Y)$ mediante la función

$$\varphi^* : Hom(X,Y) \to Hom(X',Y)$$

dada por $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$. Pruebe que φ^* es un homomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. – Veamos que es homomorfismo. En efecto, recordemos que el neutro del grupo $Hom(X,Y)$ es el homomorfismo trivial Θ, luego para $x \in X'$,

$$\varphi^*(\Theta)(x) = (\Theta \circ \varphi)(x) = \Theta(\varphi(x)) = 0_Y$$

por lo que $\varphi^*(\Theta)$ es el homomorfismo trivial en $Hom(X',Y)$. Por otro lado, sean $f, g \in Hom(X,Y)$, entonces

$$\varphi^*(f+g)(x) = ((f+g) \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) + g(\varphi(x)) = \varphi^*(f)(x) + \varphi^*(g)(x)$$

por lo que abre la operación y finalmente veamos que si $g \in Hom(X,Y)$ entonces

$$((\varphi^*(g)) + (\varphi^*(-g)))(x) = g(\varphi(x)) + (-g)(\varphi(x)) = g(\varphi(x)) - g(\varphi(x)) = 0_Y$$
$$\therefore \quad -\varphi^*(g) = \varphi^*(-g) \in Hom(X',Y)$$

por lo tanto, es homomorfismo.

■

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo I.4

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 4.2. Pruebe que los múltiplos de $\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{Z}$ son subgrupos de $\mathbb{Z}$.

Demostración. – En efecto, sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces por definición $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ y además $n \cdot 0 = 0$ por lo que $0 \in n\mathbb{Z}$, ahora, sean $a, b \in n\mathbb{Z}$ entonces existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $a = nx$, $b = ny$ por lo que $a - b = nx - ny = n(x - y) \in n\mathbb{Z}$, por lo que efectivamente es subgrupo.

■

Problema 4.6. Pruebe que solo existen (salvo isomorfismo) un solo grupo de orden 1, 2 y 3; 2 grupos de orden 4 y 2 grupos de orden 6.

Demostración. – El caso de un grupo de orden 1 es inmediato. Para orden 2 y 3 sabemos que en general cualquier grupo de orden primo es grupo cíclico y al ser grupos cíclicos son isomorfos a $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$ por ende todos serán el mismo salvo isomorfismo. Para el caso de orden 4 tenemos por el Teorema de Lagrange que cualquier elemento del grupo tendrá orden un divisor de 4, es decir, 1, 2 o 4, pero el único elemento de orden 1 es el neutro, por lo que los demás elementos son de orden 2 o 4. Si al menos un elemento es de orden 4 entonces este sera un grupo ciclico con este generador, siendo el primer grupo posible, si resulta que todos los elementos son de orden 2 entonces tendrá que pasar que $a^2 = b^2 = c^2 = e$, sin embargo con ello tendremos que se tendrá que cumplir que $ab = c$, esto pues no puede pasar ninguno de los otros tres casos, si $ab = a \Rightarrow b = e$!!!, si $ab = b \Rightarrow a = e$!!!, y si $ab = e \Rightarrow a = b^{-1}$!!! cosa que no puede pasar, entonces necesariamente $ab = c$ y de la misma manera obtenemos que entonces $ac = b$ y $bc = a$, lo que me determina un grupo distinto al primero, siendo en total dos grupos distintos. Este mismo argumento se usa para el caso de grupos de orden 6.

■