# Algebra Moderna

## Ejercicios Capitulo II.1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

**Problema 1.2.** Pruebe que, en una sucesión exacta de grupos

$$G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \xrightarrow{h} H \xrightarrow{k} H'$$

$f$ es un epimorfismo y $k$ un monomorfismo si, y solo sí $G'' = e$

**Demostración**. – Supongamos que $f$ es un epimorfismo y $k$ un monomorfismo. Consideremos la sub sucesión exacta que podemos formar

$$G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \xrightarrow{h} H$$

entonces como $f$ es epimorfismo, tendremos por la proposición 1.6 del capitulo II.1 que esto pasara si y solo si $g$ es trivial y esto pasara si y solo si $h$ es monomorfismo. Por otro lado, si consideramos la sub sucesión exacta

$$G \xrightarrow{g} G'' \xrightarrow{h} H \xrightarrow{k} H'$$

tendremos que $k$ será monomorfismo si y solo si $h$ es trivial y esto si y solo si $g$ es epimorfismo.

De estas dos condiciones tendremos que necesitaremos que $h$ es trivial y es monomorfismo al mismo tiempo, pero la única forma en que esto sea posible es que $G''$ tenga un solo elemento, y al como es grupo, necesariamente tiene que ser el trivial.

■

# Algebra Moderna

## Ejercicios Capitulo II.2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

**Problema 2.3.** Encuentre todas las clases laterales para el subgrupo $H = \{0,3\}$ de $\Delta_3$ de los movimientos rígidos de un triángulo equilátero.

**Solución**. – Creo que el problema se refiere al grupo Diédrico D3, sin embargo, son 6 operaciones distintas entre rotaciones y reflexiones, y no entiendo a que se refiere el problema con el subgrupo de 0 y 3, ya que no es una notación que yo conozca.

**Problema 2.7.** Pruebe que, bajo un homomorfismo de grupos, la imagen inversa de un subgrupo normal es un subgrupo normal en el dominio.

**Solución**. – Consideremos $h : G \to F$ homomorfismo de grupos y sea $H \triangleleft F$. Veamos que entonces $h^{-1}[H] \triangleleft G$.

Por lo que ya sabemos, efectivamente dado que $h$ es homomorfismo tendremos que $h^{-1}[H] < G$, entonces solo resta probar que será normal. Sea $x \in G$, por definición

$$xh^{-1}[H]x^{-1} = \left\{xyx^{-1} : y \in h^{-1}[H]\right\}$$

en razón de eso sea $z \in xh^{-1}[H]x^{-1}$ entonces $z = xyx^{-1}$ para alguna $y \in h^{-1}[H]$ pero como $y \in h^{-1}[H] \Leftrightarrow h(y) \in H$ y al ser $H$ un subgrupo normal de $F$ tendremos que $h(x)h(y)h(x)^{-1} \in H \underset{h \text{ homomor.}}{\Leftrightarrow} h(xyx^{-1}) \in H \subset F$ por lo que $h(xyx^{-1}) \in F \Leftrightarrow xyx^{-1} \in h^{-1}[F] \subset G$, es decir $xh^{-1}[H]x^{-1} \subseteq G$, por lo tanto, es normal.

■

**Problema 2.10.** Escriba la demostración de 2.10.

**Solución**. – Por la el teorema 2.9, $f^*$ es homomorfimo. Es único puesto que esta determinado por $g$. También $x + I \in \ker f^*$ si y solo si $f(x) = e$, lo cual sucede si y solo si $x \in \ker f$. Asi $\ker f^* = \{x + I : x \in \ker f\} = \ker f / I$. Claramente $imf = imf^*$. Finalmente $f^*$ es un epimorfismo si y solo si $f$ es epimorfismo y $f^*$ es monomorfimo si y solo si $\ker f^* = \ker f / I$ es el subgrupo trivial de $\Lambda / I$ lo cual sucede cuando $\ker f = I$.

∎

**Problema 2.11.** Pruebe que si $N$, $H$ y $G$ son grupos tales que $N < H < G$, entonces $(G : N) = (G : H)(H : N)$ y que, si dos de estos índices son finitos, entonces el tercero también.

**Demostración**. – Tenemos que

$$(G : N) = \frac{o(G)}{o(N)} = \frac{o(G)}{o(N)}\frac{o(H)}{o(H)} = \frac{o(G)}{o(H)}\frac{o(H)}{o(N)} = (G : H)(H : N)$$

y si dos son finitos por la igualdad el tercero también.

∎

# Algebra Moderna

## Ejercicios Capitulo II.3

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

**Problema 3.3.** Considere el conjunto $Aut(G)$ de todos los automorfismos de un grupo $G$. Pruebe que $Aut(G)$ es un grupo bajo la composición y que $In(G) \lhd Aut(G)$. Se dice que dos automorfismos $f, g$ pertenecen a la misma "clase de automorfismos" si $f = h \circ g$ para algún automorfismo $h$. Pruebe que las clases de automorfismo forman un grupo $Aut(G) / In(G)$ llamado "automorfismos exteriores de G"

**Demostración**. – En efecto es grupo. Sabemos que composición de homomorfismos es homomorfismo por lo que la operación en es cerrada, además el homomorfismo identidad será la identidad de nuestro grupo pues para cada $f \in Aut(G)$, $f \circ e = f = e \circ f$, cumple la ley asociativa ya que en general la composición de funciones la cumple y además para cada $f \in Aut(G)$, sabemos que al ser $f$ isomorfismo es invertible, y además su inversa es también homomorfismo y tal que $f \circ f^{-1} = e$ por lo que estos son los elementos inversos, siendo así un grupo.

Por otro lado, por el problema 3.2 sabemos que cualquier automorfismo interior es automorfismo, entonces $In(G) \leq Aut(G)$, solo resta ver que es normal. Sean $f \in Aut(G)$ y $g \in In(G)$, entonces definamos $h := f \circ g \circ f^{-1}$ y veamos que es automorfismo interior. En efecto, como $g \in In(G)$ existe $x \in G$ tal que $g(y) = xyx^{-1}$, de tal forma que

$$h(y) = (f \circ g \circ f^{-1})(y) = f(g(f^{-1}(y))) = f(xf^{-1}(y)x^{-1})$$
$$\underset{\text{homomorfismo}}{=} f(x)f(f^{-1}(y))f(x^{-1}) = f(x)yf(x)^{-1}$$

por lo tanto $h$ es automorfismo interior, y por ende $In(G) \lhd Aut(G)$. La ultima es inmediata por la teoría desarrollada de las clases laterales.

■

**Problema 3.7.** Pruebe que un homomorfismo de grupos $g : G \to G''$ ¨es inyectivo si y solo si $\ker g = e$ y que es suprayectivo si y solo si $co\ker g = e$

**Solución**. – La primera es inmediata. Supongamos que $g$ es inyectiva, esto es si y solo si para cada $g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y$ es decir $g(x) = e = g(e) \Leftrightarrow x = e$ por lo que $\ker g = e$. Y si $\ker g = e$ entonces si $g(x) = g(y) \Rightarrow g(x-y) = e \Rightarrow x - y = e \Rightarrow x = y$, es inyectiva.

Ahora para el segundo, supongamos que $g$ es suprayectiva esto pasa si y solo si $\operatorname{Im} g = G''$ y por tanto $co\ker g = G'' / \operatorname{Im} g = G'' / G'' = e$. El regreso se da pues $G'' / \operatorname{Im} g = e \Leftrightarrow \operatorname{Im} g = G''$.

# Algebra Moderna

## Ejercicios Capitulo II.4

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

**Problema 4.3.** Establezca una definición del producto directo externo en términos de la observación anterior al Teorema 4.1.

**Solución**. – En este problema no entendí bien que es lo que se me pide. Ya que en el libro ya dan la definición de producto directo externo.

**Problema 4.7.** Pruebe que $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \ncong \mathbb{Z}_9$.

**Demostración**. – Notemos que $\mathbb{Z}_9$ es cíclico pues un generador es $2$, sin embargo, el grupo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ no es cíclico ya que

$$\begin{array}{ll} (0,1)^n = (0,1) \neq (1,0) & (1,2)^n = (1,2^n) \neq (0,0) \\ (0,2)^n = (0,2^n) \neq (1,0) & (2,0)^n = (2^n,0) \neq (0,1) \\ (1,0)^n = (1,0) \neq (0,1) & (2,1)^n = (2^n,1) \neq (0,1) \\ (1,1)^n = (1,1) \neq (0,1) & (2,2)^n = (2^n,2^n) \neq (0,0) \end{array}$$

por lo que ningún elemento es generador. Por tanto, no pueden ser isomorfos. ■

**Problema 4.11.** Proporcione todos los detalles de la demostración del Teorema 4.1.

**Demostración**. – Veamos que la función $\varphi$ es homomorfismo de grupos. En efecto, tenemos que dados $x, y \in G$,

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= (\varphi_1(xy),\dots,\varphi_n(xy)) = (\varphi_1(x)\varphi_1(y),\dots,\varphi_n(x)\varphi_n(y)) \\ &= (\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)) \cdot (\varphi_1(y),\dots,\varphi_n(y)) = \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

siendo pues homomorfismo. Y de forma sencilla

$$(p_i \circ \varphi)(x) = p_i(\varphi(x)) = p_i(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)) = \varphi_i(x)$$

por lo que $p_i \circ \varphi = \varphi_i$, completando los detalles. ■

**Problema 4.15.** Sean $H_1 \triangleleft G_1$ y $H_2 \triangleleft G_2$ subgrupos normales. Pruebe que $H_1 \times H_2 \triangleleft G_1 \times G_2$ y que $G_1 \times G_2 \,/\, H_1 \times H_2 \cong G_1 \,/\, H_1 \times G_2 \,/\, H_2$.

**Demostración**. – En efecto, consideremos $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ y $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ entonces

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1})$$

pero como $H_1 \triangleleft G_1$ y $H_2 \triangleleft G_2$ entonces $g_1 h_1 g_1^{-1} \in H_1$ y $g_2 h_2 g_2^{-1} \in H_2$ por lo que

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} \in H_1 \times H_2$$

entonces son subgrupos normales. Además, si definimos

$$\varphi : G_1 \times G_2 \,/\, H_1 \times H_2 \to G_1 \,/\, H_1 \times G_2 \,/\, H_2$$

dada por $\varphi((g_1, g_2)(H_1 \times H_2)) = g_1 H_1 \times g_2 H_2$ tendremos que esta bien definida y además

$$\begin{aligned} \varphi((g_1, g_2)(H_1 \times H_2) \cdot (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)(H_1 \times H_2)) &= \varphi((g_1 \tilde{g}_1, g_2 \tilde{g}_2)(H_1 \times H_2)) = g_1 \tilde{g}_1 H_1 \times g_2 \tilde{g}_2 H_2 \\ &= (g_1 H_1)(\tilde{g}_1 H_1) \times (g_2 H_2)(\tilde{g}_2 H_2) = [(g_1 H_1) \times (g_2 H_2)][(\tilde{g}_1 H_1) \times (\tilde{g}_2 H_2)] \end{aligned}$$

por la propia definición será suprayectiva y además

$$\varphi((g_1, g_2)(H_1 \times H_2)) = H_1 \times H_2 \iff g_1 = e_1,\ g_2 = e_2 \iff (g_1, g_2) = (e_1, e_2)$$

Por lo que el núcleo es trivial, siendo inyectiva y por tanto un isomorfismo. ■