Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo III.1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1.2. Encuentre los posibles grupos abelianos salvo isomorfismo de orden 12, 16.

Solución. – Tenemos que

- $12 = 2^2 \cdot 3$, entonces los grupos serán

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

- $16 = 2^4$, entonces los grupos serán

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

■

Problema 1.6. Encuentre los posibles grupos abelianos salvo isomorfismo de orden 1150.

Solución. – Tenemos que $1150 = 2 \cdot 5^2 \cdot 23$, entonces

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{23} \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{23} \end{array}$$

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo III.2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 2.4. Pruebe que si σ es una permutación de S_n y en $I_n = \{1,..,n\}$, $i \equiv j$ si, y solo si $\sigma^r(i) = j$, para algún entero r, entonces $\equiv$ es una relación de equivalencia en I_n.

Demostración. – En efecto.

- La relación es simétrica. Sea $i \in I$, entonces $\sigma^0(i) = i$, por lo que $i \equiv i$.
- La relación es reflexiva. Sean $i,j \in I$ tales que $i \equiv j$, entonces existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma^r(i) = j$, entonces $\sigma^{r-1}(i) = \sigma^{-1}(j) \Rightarrow \sigma^{r-2}(i) = \sigma^{-2}(j) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \sigma^{-r}(j) = i$, por lo que $j \equiv i$.
- La relación es transitiva. Sean $i,j,k \in I$ tales que $i \equiv j$ y $j \equiv k$, entonces existen $r,s \in \mathbb{Z}$ tales que $\sigma^r(i) = j$ y $\sigma^s(j) = k \quad \Rightarrow \quad \sigma^{s+r}(i) = \sigma^s(\sigma^r(i)) = \sigma^s(j) = k$ por lo que $i \equiv k$.

Por lo tanto, es de equivalencia.

■

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo III.3

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 3.1. Sea L el conjunto de todas las palabras reducidas de K y adjuntémosle la palabra vacía (la cual no está en K) misma que denotaremos con 1. Definamos una operación binaria en L con las siguientes condiciones: Si alguno de los elementos x ó y es 1 su producto es x ó y, de otra manera su producto es una palabra reducida xy. Pruebe que esta operación binaria proporciona estructura de grupo de L

Demostración. –

⊙ Es claro que la operación es cerrada, por la propia definición de las palabras.

⊙ La operación es asociativa. Consideremos $(x_1,..,x_r),(y_1,..,y_s),(z_1,..,z_k) \in L$ entonces

$$\begin{aligned}(x_1,..,x_r)\left[(y_1,..,y_s)(z_1,..,z_k)\right] &= (x_1,..,x_r)(y_1,..,y_s,z_1,..,z_k) = (x_1,..,x_r,y_1,..,y_s,z_1,..,z_k)\\ &= (x_1,..,x_r,y_1,..,y_s)(z_1,..,z_k) = \left[(x_1,..,x_r)(y_1,..,y_s)\right](z_1,..,z_k)\end{aligned}$$

⊙ Por definición el neutro es la palabra vacía.

⊙ NOTA: No encontré como ver cuáles son los inversos. ¿Está bien definida la operación? Pues si considero $x_1x_2x_1^{-1}$ es reducida, pero $\left(x_1x_2x_1^{-1}\right)\left(x_1x_2x_1^{-1}\right)$ ya no lo seria.

■

Problema 3.5. Sean L y L' grupos abelianos libres isomorfos generados por X y X' respectivamente. Pruebe que si X consiste de un numero finito de elementos, entonces X' consiste del mismo número de elementos.

Demostración. – Dado que L y L' son grupos abelianos libres isomorfos generados por X y X', entonces existen $f : X \to L$ y $f' : X' \to L'$ inyectivas y $g : L \to L'$ isomorfismo, entonces la función $f'^{-1} \circ g \circ f$ resultara ser inyectiva (restringida), y es tal que va de $X \to X'$ por lo que $|X| \le |X'|$ y de forma similar con la función $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f'$ tendremos que $|X| \ge |X'|$ por lo tanto $|X| = |X'|$.

■

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo III.4

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 4.3. Sea $g : X \times (\sum_{i\in I} Y_i) \to (\sum_{i\in I} X \otimes Y_i)$ dada por $g(x,(y_i)) = (x \otimes y_i)$ como en la Proposición 4.5. Compruebe que g es biaditiva. También compruebe que $\varphi \circ h = 1_{X\otimes(\sum_{i\in I} Y_i)}$, y que $h \circ \varphi = 1_{\oplus_{i\in I}(X\otimes Y_i)}$.

Demostración. –

- En efecto es biaditiva, sean $x_1, x_2 \in X$ y $y \in \sum_{i\in I} Y_i$, entonces

$$g(x_1 + x_2, y) = ((x_1 + x_2) \otimes y) = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$$

y por otro lado si $x \in X$ y $y, \tilde{y} \in \sum_{i\in I} Y_i$, entonces

$$g(x, y + \tilde{y}) = (x \otimes (y + \tilde{y})) = (x \otimes y) + (x \otimes \tilde{y}) = g(x,y) + g(x,\tilde{y})$$

- En este caso es claro ya que como φ y h son homomorfismo, entonces su composición $\varphi \circ h$ es un homomorfimo pero dada la unicidad en el producto tensorial la única opción es que sea la identidad en el dominio. Lo mismo en el otro caso.

∎

Problema 4.3. Pruebe que $X \otimes (Y \otimes Z) \cong X \otimes Y \otimes Z$

Demostración. – Consideremos la función biaditiva

$$g'' : Y \times Z \to X \otimes Y \otimes Z$$

dada por $g''(y,z) = w \otimes y \otimes z$ para $w \in X$ fija, la cual induce un homomorfismo

$$h_w : Y \otimes Z \to X \otimes Y \otimes Z$$

tal que $h_w(y \otimes z) = w \otimes y \otimes z$. Sea

$$g : X \otimes (Y \otimes Z) \to X \otimes Y \otimes Z$$

dada por $g(w,t) = h_w(t)$. g es biaditiva y por tanto induce un homomorfismo

$$h : X \otimes (Y \otimes Z) \to X \otimes Y \otimes Z$$

tal que

$$h(w \otimes (y \otimes z)) = w \otimes y \otimes z$$

Construyamos ahora una función

$$h' : X \otimes Y \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$

tal que $h' \circ h = 1_{X \otimes (Y \otimes Z)}$ y $h \circ h' = 1_{X \otimes Y \otimes Z}$. Para ello consideremos la funcion

$$g' : X \times Y \times Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$

dada por $g'(w,y,z) = w \otimes (y \otimes z)$. g' es biaditiva, luego induce un homomorfimos

$$h' : X \otimes Y \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$

tal que $h'(x \otimes y \otimes z) = w \otimes (y \otimes z)$. Y por la misma razón, tendremos que de hecho h y h' son inversas y por tanto son isomorfismos.

$\blacksquare$

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo III.5

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 5.3. Pruebe que el subgrupo K es normal en $N_G(K)$.

Demostración. – Es inmediato de la definición, pues si tomamos $g \in N_G(K)$ y $k \in K$, entonces dado que $g \in N_G(K) \Rightarrow gKg^{-1} = K \Rightarrow gkg^{-1} \in K$ por tanto es normal.

■

Problema 5.7. Pruebe que solo existen dos grupos de orden $2p$ para cada numero primo p, uno es cíclico y el otro es D_p

Demostración. – Por el teorema de Cauchy sabemos que deben de existir un elemento en el grupo de orden p y otro de orden 2, llamémosles x e y, entonces necesariamente le grupo esta formado por elementos de la forma $x^k y^j$ con $k = 0,..,p-1$ y $j = 0,1$.
Ahora, dado que $\langle x \rangle \lhd G$, tendremos que $y^{-1}xy = x^k$ para alguna $k = 0,..,p-1$, sin embargo, podemos notar los siguiente:

$$x = e^{-1}xe = (y^2)^{-1}xy^2 = y^{-1}(y^{-1}xy)y = y^{-1}x^k y = (y^{-1}xy)\cdots(y^{-1}xy) = (x^t)^t = x^{t^2}$$

y entonces necesariamente el orden de x debe dividir a t^2-1, es decir $p \mid t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$ por lo que la única posibilidad para que esto pase es que $t = 1$ o que $t = p-1$, donde en el primer caso obtenemos un grupo cíclico y en el segundo el grupo diédrico.

■

Problema 5.11. Determine todos los grupos, salvo isomorfismo, de orden 8.

Demostración. – Tal y como en los casos pasados estos serán

$\mathbb{Z}_8$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
D_4
Q_8 (cuaterniones)

■