Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo V.1

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 1.1. Considere una familia de campos $\{K_i\}$ para $i = 1,..,s$ tal que cada K_{i+1} es una extensión finita de K_i. Pruebe que K_s es una extensión finita de K_1 y que

$$[K_1 \mapsto K_s] = [K_1 \mapsto K_2][K_2 \mapsto K_3]\cdots[K_{s-1} \mapsto K_s]$$

Demostración. – Por inducción sobre s. El caso base fue probado en el teorema 1.4. Ahora supongamos que se cumple para alguna $s > 2$. Ahora consideremos $\{K_i\}$ para $i = 1,..,s+1$ tal que cada K_{i+1} es una extensión finita de K_i. Entonces por hipótesis de inducción K_s es una extensión finita de K_1 y es tal que

$$[K_1 \mapsto K_s] = [K_1 \mapsto K_2][K_2 \mapsto K_3]\cdots[K_{s-1} \mapsto K_s]$$

de este modo si consideramos $K_s \mapsto K_{s+1}$ y el anterior, tendremos que por el caso base

$$[[K_1 \mapsto K_2][K_2 \mapsto K_3]\cdots[K_{s-1} \mapsto K_{s+1}] = [K_1 \mapsto K_s][K_s \mapsto K_{s+1}] = [K_1 \mapsto K_{s+1}]$$

■

Problema 1.5. Pruebe que si f es un polinomio en $K'[t]$ de grado 2 o 3, entonces f tiene una raíz en K' si y solo si f es reducible en K'

Demostración. – Si f tiene una raíz en K' entonces es claro que será reducible (pues $x - a$ será factor). Por otro lado si f es reducible entonces existe g tal que $f(x) = g(x)h(x)$. Pero dad o que $\text{grad}(f) = \text{grad}(g) + \text{grad}(h)$, entonces al menos uno de ellos tiene grado 1. Y como sabemos todo polinomio lineal tiene una raíz en el campo, por lo que f tiene una raíz.

■

Problema 1.9. Compruebe que $m_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(t) = t^2 - 2$, que $m_{\sqrt{2},\mathbb{R}}(t) = t - \sqrt{2}$ y por lo tanto, $\sqrt{2}$ es algebraico de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$ y que es algebraico de grado 1 sobre $\mathbb{R}$. Compruebe que $m_{i,\mathbb{C}}(t) = t - i$

Demostración. – Consideremos el polinomio $p(t) = t^2 - 2$. Tenemos que $\sqrt{2}$ es raíz de $p(t)$. Además por el criterio de Eisensteinn, tenemos que $p(t)$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}[t]$ y por el teorema de gauss, tenemos que $p(t)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[t]$, concluyendo entonces que $p(t)$ es el polinomio mínimo de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$, además el grado será 2. Por otro lado, de forma más sencilla tenemos que el polinomio $g(t) = t - \sqrt{2}$ es irreducible también y al ser lineal es necesariamente el polinomio mínimo, siendo de grado 1. Lo mismo para el último polinomio. ■

Problema 1.13. Compruebe que $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2},)$.

Demostración. – Tenemos que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2},)$ es el campo de descomposición de $f(x) = (x^2 - 2)(x^3 - 2)$. Y además sabemos que la misma razón que en el problema anterior $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2},); \mathbb{Q}] = 5$ ya que $grad(f) = 5$, por dende $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}); \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2},)] = 6 - 5 = 1$ ■

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo V.2

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 2.4. Pruebe las siguientes

(i) $()_* : Aut(\Delta') \to Aut(K')$ es un monomorfismo.

(ii) $()_* : Aut(\mathbb{Z}) \to Aut(\mathbb{Q})$ es un isomorfismo y por lo tanto $Aut(\mathbb{Q}) = \{I_{\mathbb{Q}}\}$.

Demostración. – Sinceramente en este problema por más que busqué en el capítulo correspondiente no encontré que función es a la que se refiere el problema.

(i) En efecto. Se tiene que

$$(\sigma + \rho)_*(a) = (\sigma + \rho)(a) = \sigma(a) + \rho(a) = \sigma_*(a) + \rho_*(a)$$

$$(\sigma \circ \rho)_*(a) = (\sigma \circ \rho)(a) = \sigma(\rho(a)) = \sigma(\rho_*(a)) = (\sigma_* \circ \rho_*)(a)$$

la inyectividad se hereda de la inyectividad de σ.

(ii) Falto.

Algebra Moderna

Ejercicios Capitulo V.3

Por: Alvarado Cabrera Lorenzo Antonio

Problema 3.2. Pruebe que el grupo de Galois $Gal(K \mapsto K'')$ relativo a las extensiones $(K' \mapsto K)$ y $(K' \mapsto K'')$ es subgrupo de $Gal(K' \mapsto K'')$

Demostración. – Es claro que la identidad de $Gal(K' \mapsto K'')$ pertenece al conjunto y dado que por si mismo $Gal(K \mapsto K'')$ es un grupo, solo es necesario comprobar que $Gal(K \mapsto K'') \subseteq Gal(K' \mapsto K'')$, pero esto se da pues los automorfismos de K'' ¨que fijan a K, dado que $Gal(K \mapsto K'')$ relativo a las extensiones $(K' \mapsto K)$ y $(K' \mapsto K'')$ tambien fijan a K', por lo que son automorfimos de K'' que fijan a K', de donde $Gal(K \mapsto K'') \subseteq Gal(K' \mapsto K'')$ y por tanto es subgrupo.

■

Problema 3.6. Pruebe que $\mathbb{F}_{p^l} \leq \overline{\mathbb{F}_p}$ es el subcampo de descomposición para los polinomios $t^{p^l} - t$ y $t^{p^l-1} - 1$ sobre $\mathbb{F}_p$.

Demostración. – Esto es inmediato de la definición, pues las raíces de $t^{p^l} - t$ y $t^{p^l-1} - 1$ están en $\mathbb{F}_p$ por lo que se factorizan linealmente en el y además $\mathbb{F}_{p^l} = \mathbb{F}_p[a_1, .., a_{p^l}]$ las raíces del polinomio, por lo que es el subcampo de descomposición.

■