Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Algebra Moderna II

Examen I

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

(2.5 puntos) Considera a $\mathbb{Q}$ como un anillo, y sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Considera

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} : \Big((m,n) = 1 \Big) \wedge \Big(p \nmid m \Big) \right\}.$$

Es decir, el conjunto de aquellos racionales tales que en su forma reducida el denominador no es divisible por p.

Demuestra que $\mathbb{Q}_p$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$.

Demostración: Daré una definición mas explicita del conjunto para evitarme confusiones, se tiene que $\mathbb{Q}_p = \left\{ q \in \mathbb{Q} : p \nmid m \text{ con } m \text{ el demoninador de la forma reducida de } q \right\}$

Primeramente, dado que $1 \mid m \quad \forall m$, se descarta el caso $p = 1$. Así consideremos $p > 1$.

- Es no vacío, pues $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ y $\forall p > 1$ primo $p \nmid 1 \therefore 1 \in \mathbb{Q}_p$.

- Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_p$, veamos qué $q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}_p$.

Por contradicción, supongamos que $q_1 - q_2 \notin \mathbb{Q}_p$. Como $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_p$ tendremos que $p \nmid m_1$ y $p \nmid m_2$ con m_1, m_2 los denominadores de sus formas reducidas, con ello tenemos que el denominador de $q_1 - q_2$ será $m_1 m_2$ y el denominador de su forma reducida (m) será un múltiplo de estos, es decir, $m_1 m_2 = k \cdot m$. Como $q_1 - q_2 \notin \mathbb{Q}_p$ tendremos que $p \mid m$ con lo que $p \mid km = m_1 m_2$ y entonces al ser p un primo necesariamente $p \mid m_1$ o $p \mid m_2$, pero cualquiera de estos dos casos son imposibles, pues por hipótesis $p \nmid m_1$ y $p \nmid m_2 \therefore q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}_p$.

- Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_p$, veamos qué $q_1 q_2 \in \mathbb{Q}_p$.

Por contradicción, supongamos que $q_1q_2 \notin \mathbb{Q}_p$. Como $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_p$ tendremos que $p \nmid m_1$ y $p \nmid m_2$ con m_1, m_2 los denominadores de sus formas reducidas, con ello tenemos que el denominador de q_1q_2 será m_1m_2 y el denominador de su forma reducida (m) será un múltiplo de estos, es decir, $m_1m_2 = k \cdot m$. Como $q_1q_2 \notin \mathbb{Q}_p$ tendremos que $p \mid m$ con lo que $p \mid km = m_1m_2$ y entonces al ser p un primo necesariamente $p \mid m_1$ o $p \mid m_2$, pero cualquiera de estos dos casos son imposibles, pues por hipótesis $p \nmid m_1$ y $p \nmid m_2$ $\therefore$ $q_1q_2 \in \mathbb{Q}_p$.

Con todo esto tenemos que $\mathbb{Q}_p$ es subanillo de $\mathbb{Q}$.

$\blacksquare$

Problema 2. –

(2.5 puntos) Sean $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definido por $i(z) = z$. Demuestra que:

a) i no es suprayectivo.

b) Si A es un anillo y $f_1, f_2 : \mathbb{Q} \to A$ son dos morfismos de anillos tales que $f_1 \circ i = f_2 \circ i$, entonces $f_1 = f_2$.

Demostración:

a) Se tiene que $\forall z \in \mathbb{Z}$, $z \underset{i}{\rightarrow} \frac{z}{1} = z$ visto como elemento de los racionales, por lo que $\forall z \in \mathbb{Z}$ $i(z) \neq \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$, $p > 1$, por lo que i no es suprayectiva (en particular podemos tomar como ejemplo $\frac{1}{2}$).

$\blacksquare$

b) Primeramente, notemos que por hipótesis las funciones coinciden en los enteros, i.e, $\forall z \in \mathbb{Z},\ f_1(z) = f_2(z)$. Considerando a los racionales con su estructura de campo y sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, entonces

$$f_1(\tfrac{p}{q}) = f_1(p \cdot \tfrac{1}{q}) \underset{morfismo}{=} f_1(p) f_1(\tfrac{1}{q}) \underset{p\in\mathbb{Z}}{=} f_2(p) f_1(q^{-1}) \underset{morfismo}{=} f_2(p \cdot \tfrac{q}{q}) f_1(q^{-1}) = f_2(\tfrac{p}{q}) f_2(q) f_1(q^{-1})$$
$$\underset{q\in\mathbb{Z}}{=} f_2(\tfrac{p}{q}) f_1(q) f_1(q^{-1}) \underset{morfismo}{=} f_2(\tfrac{p}{q}) f_1(qq^{-1}) = f_2(\tfrac{p}{q}) f_1(1) \underset{1\in\mathbb{Z}}{=} f_2(\tfrac{p}{q}) f_2(1) \underset{morfismo}{=} f_2(\tfrac{p}{q})$$

por lo que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ se tiene que $f_1(\frac{p}{q}) = f_2(\frac{p}{q})$ por lo tanto, las funciones son iguales.

$\blacksquare$

Problema 3. –

(5 puntos) Sean $A_1, \ldots A_n$, $B_1, \ldots B_n$ anillos tales que para $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\phi_i : A_i \to B_i$ morfismo de anillos. Considera $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ y $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ los anillos producto. Demuestra que

a) Existe un morfismo de anillos $\phi : A \to B$ tal que $\phi((a_1, \ldots, a_n)) = (\phi_1(a_1), \ldots, \phi(a_n))$.

b) Si cada $\phi_i : A_i \to B_i$ es epimorfismo, entonces $\phi : A \to B$ es epimorfismo.

c) $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi_1) \times \mathrm{Ker}(\phi_2) \times \ldots \times \mathrm{Ker}(\phi_n)$
Sean para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $I_i \subseteq A_i$ un ideal bilateral de A_i. Considera $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$.

d) I es un ideal bilateral de A.

e) $A/I \simeq \left(A_1/I_1\right) \times \left(A_2/I_2\right) \times \ldots \times \left(A_n/I_n\right)$

Demostración: Recordemos que la suma y el producto en el anillo producto se define entrada a entra.

a) Veamos que la función $\Phi : A \to B$ dada por $\Phi(a_1, \ldots, a_n) = (\Phi_1(a_1), \ldots, \Phi_n(a_n))$ es morfismo.

- Esta bien definida, pues para cada $a_i \in A_i$ se tiene que $\Phi_i(a_i) \in B_i$.

- Sean $a, b \in A$, con $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ PD $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.

En efecto, tendremos que

$$\Phi(a+b) = \Phi((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) = \Phi(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = (\Phi_1(a_1 + b_1), \ldots, \Phi_n(a_n + b_n))$$

y como cada $\Phi_i : A_i \to B_i$ es un morfismo y $a_i, b_i \in A_i \Rightarrow \Phi_i(a_i + b_i) = \Phi_i(a_i) + \Phi_i(b_i)$, entonces

$$\begin{aligned}(\Phi_1(a_1 + b_1), \ldots, \Phi_n(a_n + b_n)) &= (\Phi_1(a_1) + \Phi_1(b_1), \ldots, \Phi_n(a_n) + \Phi_n(b_n)) \\ &= (\Phi_1(a_1), \ldots, \Phi_n(a_n)) + (\Phi_1(b_1), \ldots, \Phi_n(b_n)) = \Phi(a) + \Phi(b)\end{aligned}$$

por lo tanto, $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.

- Sean $a, b \in A$, con $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ PD $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$.

En efecto, tendremos que

$$\Phi(ab) = \Phi((a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n)) = \Phi(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) = (\Phi_1(a_1 b_1), \ldots, \Phi_n(a_n b_n))$$

y como cada $\Phi_i : A_i \to B_i$ es un morfismo y $a_i, b_i \in A_i \Rightarrow \Phi_i(a_i b_i) = \Phi_i(a_i)\Phi_i(b_i)$, entonces

$$(\Phi_1(a_1b_1),\dots,\Phi_n(a_nb_n)) = (\Phi_1(a_1)\Phi_1(b_1),\dots,\Phi_n(a_n)\Phi_n(b_n))$$
$$= (\Phi_1(a_1),\dots,\Phi_n(a_n))(\Phi_1(b_1),\dots,\Phi_n(b_n)) = \Phi(a)\Phi(b)$$

por lo tanto, $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$.

Con todo esto concluimos que Φ es un morfismo de anillos.

■

b) Supongamos que cada $\Phi_i : A_i \to B_i$ es epimorfismo y veamos que entonces Φ será epimorfismo.

Sea $b \in B$, con $b = (b_1,\dots,b_n)$ y $b_i \in B_i$, como cada $\Phi_i : A_i \to B_i$ es suprayectiva sabemos que deben existir $a_i \in A_i$ para cada i tales que $\Phi_i(a_i) = b_i$, con ello consideremos $a := (a_1,\dots,a_n)$ y veamos que $\Phi(a) = b$. En efecto, $\Phi(a) = \Phi(a_1,\dots,a_n) = (\Phi(a_1),\dots,\Phi(a_n)) = (b_1,\dots,b_n) = b$, por lo que Φ es suprayectiva, siendo así, un epimorfismo.

■

c) PD $\ker(\Phi) = \ker(\Phi_1) \times \cdots \times \ker(\Phi_n)$

Sea $a = (a_1,\dots,a_n) \in \ker(\Phi)$, tendremos que

$$a \in \ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(a) = \overline{0} \Leftrightarrow (\Phi_1(a_1),\dots,\Phi_n(a_n)) = (0,\dots,0) \Leftrightarrow \Phi_i(a_i) = 0 \ \forall i$$
$$\Leftrightarrow \Phi_i(a_i) \in \ker(\Phi_i) \ \forall i \Leftrightarrow (\Phi_1(a_1),\dots,\Phi_n(a_n)) \in \ker(\Phi_1) \times \cdots \times \ker(\Phi_n)$$

por lo que $\ker(\Phi) = \ker(\Phi_1) \times \cdots \times \ker(\Phi_n)$.

■

d) Sean $I_i \subseteq A_i$ ideales PD $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ es ideal de A

Sean $r, s \in A$ y $a \in I$ con $r = (r_1,\dots,r_n)$, $s = (s_1,\dots,s_n)$ y $a = (a_1,\dots,a_n)$, $s_i, r_i \in A \wedge a_i \in I_i$.
Como para cada i, I_i es un ideal de A_i, tendremos que $r_i a_i s_i \in I_i \ \forall i$, entonces tendremos que el elemento $(r_1a_1s_1,\dots,r_na_ns_n) \in I$ por lo que

$$ras = (r_1,\dots,r_n)(a_1,\dots,a_n)(s_1,\dots,s_n) = (r_1a_1,\dots,r_na_n)(s_1,\dots,s_n) = ((r_1a_1)s_1,\dots,(r_na_n)s_n)$$
$$= (r_1a_1s_1,\dots,r_na_ns_n) \in I$$

por lo tanto, I es ideal de A.

■

e) Consideremos $f : A / I \to (A_1 / I_1) \times \cdots \times (A_n / I_n)$ dada por $f(a + I) = (a_1 + I_1,\dots,a_n + I_n)$.

- Esta bien definida, pues ya demostramos que I es ideal de A.

• Sean $a+I, b+I \in A$, con $a=(a_1,\ldots,a_n)$ y $b=(b_1,\ldots,b_n)$ PD $f((a+I)+(b+I))=f(a+I)$ $+f(b+I)$. En efecto, tendremos que

$$\begin{aligned} f((a+I)+(b+I)) &= f((a+b)+I) = f((a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)+I) = ((a_1+b_1)+I_1,\ldots,(a_n+b_n)+I_n) \\ &= ((a_1+b_1)+I_1,\ldots,(a_n+b_n)+I_n) = ((a_1+I_1)+(b_1+I_1),\ldots,(a_n+I_n)+(b_n+I_n)) \\ &= (a_1+I_1,\ldots,a_n+I_n)+(b_1+I_1,\ldots,b_n+I_n) = f(a+I)+f(b+I) \end{aligned}$$

por lo tanto, $f((a+I)+(b+I))=f(a+I)+f(b+I)$.

• Sean $a+I, b+I \in A$, con $a=(a_1,\ldots,a_n)$ y $b=(b_1,\ldots,b_n)$ PD $f((a+I)(b+I))=f(a+I)$ $f(b+I)$. En efecto, tendremos que

$$\begin{aligned} f((a+I)(b+I)) &= f((ab)+I) = f((a_1b_1,\ldots,a_nb_n)+I) = ((a_1b_1)+I_1,\ldots,(a_nb_n)+I_n) \\ &= ((a_1b_1)+I_1,\ldots,(a_nb_n)+I_n) = ((a_1+I_1)(b_1+I_1),\ldots,(a_n+I_n)(b_n+I_n)) \\ &= (a_1+I_1,\ldots,a_n+I_n)(b_1+I_1,\ldots,b_n+I_n) = f(a+I)f(b+I) \end{aligned}$$

por lo tanto, $f((a+I)(b+I))=f(a+I)\ f(b+I)$.

• Es inyectiva. Sean $a+I, b+I \in A/I$ tales que $f(a+I)=f(b+I) \iff$

$$\begin{aligned} &(a_1+I_1,\ldots,a_n+I_n)=(b_1+I_i,\ldots,b_n+I_n) \iff a_i+I_i=b_i+I_i \iff (a_i-b_i)\in I_i \\ &\iff (a_1-b_1,\ldots,a_n-b_n)\in I \iff (a_1,\ldots,a_n)-(b_1,\ldots,b_n)\in I \iff a-b\in I \iff a+I=b+I \end{aligned}$$

por lo que f es inyectiva.

• Es suprayectiva. Sea $b\in(A_1/I_1)\times\cdots\times(A_n/I_n)$ con $b=(b_1+I_1,\ldots,b_n+I_n)$ PD $\exists a+I\in A/I$ tal que $f(a+I)=b$. En efecto, sea $a:=(b_1,\ldots,b_n)$ y notemos que

$$f(a+I)=f((b_1,\ldots,b_n)+I)=(b_1+I_1,\ldots,b_n+I_n)=b$$

por lo que f es suprayectiva.

Con todo esto concluimos que f es un isomorfismo $\therefore\ A/I\cong(A_1/I_1)\times\cdots(A_n/I_n)$.

■