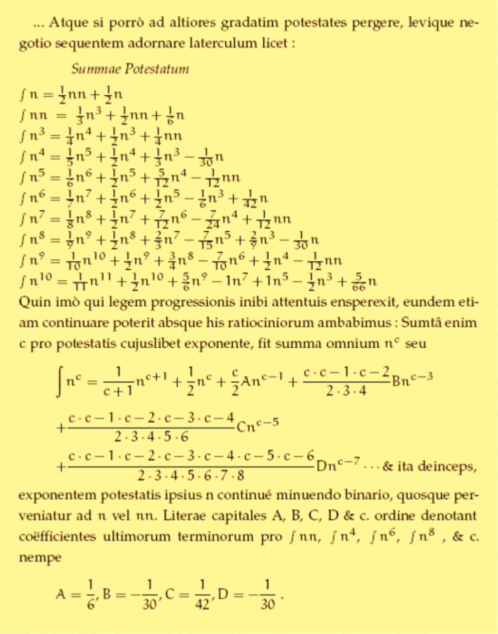
Del problema de Basilea a los números de Bernoulli: Valores exactos de la función Zeta

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

3/Noviembre/2022

– Los numeros de Bernoulli y el problema de Basilea
– Productos infinitos y la funcion ζ
– Extension analitica de ζ y $\zeta(n),\ n \in \mathbb{Z}$

Los numeros de Bernoulli y el problema de Basilea



... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

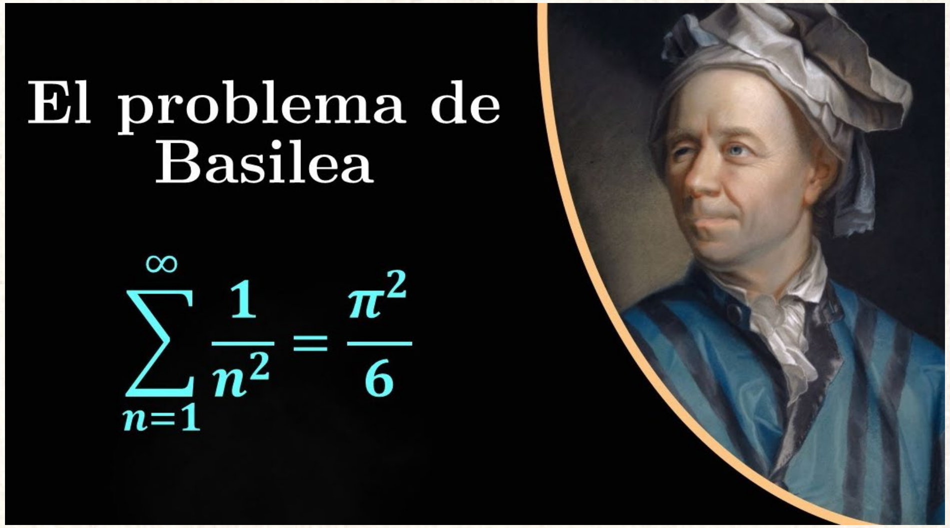
$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$
$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$
$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$
$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$
$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$
$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$
$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$
$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \cdots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$



$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\vdots$$

$$1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m=\text{¿?}\quad \text{con } m\in\mathbb{Z}^+$$

LLamemos

$$S_m(n)=1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m,\quad n\geq 1,\ m\geq 0$$

$$\Rightarrow\ S_{m+1}(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{m+1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{m+1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}k^i=1+\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{m+1}{i}k^i$$

$$=1+\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}\sum_{k=1}^{n-1}k^i=1+\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)$$

$$\Rightarrow \quad S_{m+1}(n+1) = 1 + \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} S_i(n)$$

Tenemos que

$$S_{m+1}(n+1) = 1 + \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} S_i(n)$$

$$S_{m+1}(n) + n^{m+1} = 1 + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} S_i(n) + \binom{m+1}{m} S_m(n) + \binom{m+1}{m+1} S_{m+1}(n)$$

$$\cancel{S_{m+1}(n)} + n^{m+1} = 1 + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} S_i(n) + (m+1) \cdot S_m(n) + \cancel{S_{m+1}(n)}$$

$$\Rightarrow \quad S_m(n) = \frac{1}{m+1} \left[n^{m+1} - 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} S_i(n) \right]$$

Por lo que tenemos los siguientes resultados

- $S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
- $S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
- $S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$
- $S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$
- $S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$

$$\Rightarrow$$

- $S_1(n) = \frac{1}{2}[n^2 + 2(-\frac{1}{2})n]$
- $S_2(n) = \frac{1}{3}[n^3 + 3(-\frac{1}{2})n^2 + 3(\frac{1}{6})n]$
- $S_3(n) = \frac{1}{4}[n^4 + 4(-\frac{1}{2})n^3 + 4(\frac{1}{4})n^2]$
- $S_4(n) = \frac{1}{5}[n^5 + 5(-\frac{1}{2})n^4 + 5(\frac{1}{3})n^3 + (5)(-\frac{1}{30})n]$
- $S_5(n) = \frac{1}{6}[n^6 + 6(-\frac{1}{2})n^5 + 6(\frac{5}{12})n^4 + 6(-\frac{1}{12})n^2]$

- $S_1(n) = \frac{1}{2}[(1)n^2 + 2(-\frac{1}{2})n]$

- $S_2(n) = \frac{1}{3}[(1)n^3 + 3(-\frac{1}{2})n^2 + 3(\frac{1}{6})n]$

- $S_3(n) = \frac{1}{4}[(1)n^4 + 4(-\frac{1}{2})n^3 + 6(\frac{1}{6})n^2]$

- $S_4(n) = \frac{1}{5}[(1)n^5 + 5(-\frac{1}{2})n^4 + 10(\frac{1}{6})n^3 + 5(-\frac{1}{30})n]$

- $S_5(n) = \frac{1}{6}[(1)n^6 + 6(-\frac{1}{2})n^5 + 15(\frac{1}{6})n^4 + 15(-\frac{1}{30})n^2]$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

- $S_1(n) = \frac{1}{2}\left[\binom{2}{0}n^2 + \binom{2}{1}(-\frac{1}{2})n\right]$
- $S_2(n) = \frac{1}{3}\left[\binom{3}{0}n^3 + \binom{3}{1}(-\frac{1}{2})n^2 + \binom{3}{2}(\frac{1}{6})n\right]$
- $S_3(n) = \frac{1}{4}\left[\binom{4}{0}n^4 + \binom{4}{1}(-\frac{1}{2})n^3 + \binom{4}{2}(\frac{1}{6})n^2 + \binom{4}{3}\cdot 0 \cdot n\right]$
- $S_4(n) = \frac{1}{5}\left[\binom{5}{0}n^5 + \binom{5}{1}(-\frac{1}{2})n^4 + \binom{5}{2}(\frac{1}{6})n^3 + \binom{5}{3}\cdot 0 \cdot n^2 + \binom{5}{4}(-\frac{1}{30})n\right]$
- $S_5(n) = \frac{1}{6}\left[\binom{6}{0}n^6 + \binom{6}{1}(-\frac{1}{2})n^5 + \binom{6}{2}(\frac{1}{6})n^4 + \binom{6}{3}\cdot 0 \cdot n^3 + \binom{6}{4}(-\frac{1}{30})n^2 + \binom{6}{5}\cdot 0 \cdot n\right]$

Sea $S_m(x)$ visto como polinomio en x, entonces $c_m := S_m{}'(0)$ es el coeficiente del termino lineal

pero tenemos que

$$S_m(x) = \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1} - 1 - \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(x)\right]$$

$$\therefore \quad c_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}c_i$$

por lo que sustituyendo en cada renglon obtenemos que

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\binom{m+1}{i}c_i n^{m+1-i}$$

Definición

Se definen a los Numeros de Bernoulli como:

$$B_0 = 1, \qquad B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \qquad\qquad B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0$$

Veamos algunos resultados de ellos

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = B_n \quad \text{para} \quad n > 1$

- Podemos calcular los numeros de Bernoulli hayando su funcion generadora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \quad \Rightarrow \quad f(z)e^z = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)z^n = B_0 + (B_1+1)z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)z^n$$

$$\Rightarrow \quad f(z)e^{z} = z + B_0 + B_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = z + f(z) \quad \Rightarrow \quad f(z)e^{z} = z + f(z) \quad \therefore \quad f(z) = \frac{z}{e^{z}-1}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{z}{e^{z}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \;\; \forall z \in D(0,\pi)}$$

- Se tiene que $B_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$. Vamos a considerar la funcion $\coth(z) := \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}$

$$\Rightarrow \quad \coth(z) - 1 = \frac{2e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} = \frac{2}{e^{2z}-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^{z}-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

el lado derecho es una funcion par, entonces del lado izquierdo no puede haber factores impares $\quad \therefore \; B_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$

Teorema 1

Para todo $z \in D(0,\pi)$ se tiene que

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

Dem. – Igual que lo anterior se tiene que

$$z\coth(z) - z = \frac{2z}{e^{2z}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2z)^n = 1 - z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2z)^n$$

$$\Rightarrow \quad \coth(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2z)^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2z)^{2n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \qquad \blacksquare$$

Con todo lo anterior contestamos la pregunta por una formula cerrada para $1^m + 2^m + \cdots + n^m, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

¿Que pasa si $m < 0$? No hay mucho que se pueda hacer sobre ello.

- $H_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$ son los llamados numeros armonicos generalizados

- Si $m = 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$ son los llamados numeros armonicos relacionados con la constante de Euler

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} H_n - \ln(n) \approx 0.57721...$$

Pero si podemos hablar de las series

- Si $m = -1$, tenemos la conocida serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la cual diverge (*Nicole Oresme*, en 1350 aprox)

- Si $m = -2$, tenemos el Problema de Basilea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ resuelto por *Euler*

Proposición 1 (Leonhard Euler-1735)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dem. – (Euler)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Los ceros de $\dfrac{\sin(x)}{x}$, son $x = n\pi$, con $n = \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{n\pi} = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots \right) x^2 + \left(\frac{1}{4\pi^4} + \frac{1}{9\pi^4} + \frac{1}{36\pi^4} + \cdots \right) x^4 + \cdots$$

$$\therefore \ 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots \right) x^2 + \cdots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \blacksquare$$

Sin embargo Euler fue criticado por la suposicion de tratar a las series como polinomios.

Productos infinitos y la funcion ζ

Definición (Función Zeta)

Sea $s \in \mathbb{C}_+ + 1$, entonces definimos a la funcion ζ como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Proposición 2

La funcion ζ esta bien definida y ademas es analitica en $\mathbb{C}_+ + 1$

Obs. – Euler habria demostrado que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Obs. – Se tiene que $1 < \zeta(x) < 2$ para $x > 1$

Definición (Producto infinito)

Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$. Decimos que el producto infinito $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si:

$a)$ Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z_k \neq 0, \ \forall k \geq N$

$b)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} z_k$ existe y es finito no nulo

Obs.- Si $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0 \iff z_k = 0$ para algun $1 \leq k < N$

Definición (Convergencia uniforme de productos)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ region y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesion de funciones. Decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+f_n(z)\right)$ converge uniformemente en Ω si:

$a)$ Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f_k(z) \neq -1, \ \forall k \geq N, \ \forall z \in \Omega$

$b)$ La sucesion de productos parciales $\prod_{n=N}^{m}\left(1+f_n(z)\right)$ converge uniformemente en Ω a $p(z) \neq 0$

Teorema 2 (Criterio M para productos)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ region y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesion de funciones tales que:

1) $\left|f_n(z)\right| \leq M_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall z \in \Omega$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

entonces $\prod_{n=1}^{m}\left(1+f_n(z)\right)$ converge uniformememente

Ejemplo. – El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ converge uniformemente en $\overline{D(0,R)},\ R>0$

Dem. – Sea $z \in \overline{D(0,R)}$

- Consideremos $f_n(z) = -\frac{z^2}{n^2} \ \Rightarrow\ f_n(z) = -1 \ \Leftrightarrow\ z = \pm n,$ pero como $z \in \overline{D(0,R)}$ entonces para $n > R,\ f_n(z) \neq -1$
- Veamos que converge uniformemente. Consideremos $n > R$

$a)$ $\left|f_n(z)\right| = \frac{|z|^2}{n^2} \leq \frac{R^2}{n^2} := M_n$

$b)$ $\sum_{n>R} M_n = \sum_{n>R} \frac{R^2}{n^2} < \infty$

$\therefore$ por el criterio M el prodcuto parcial converge uniformemente $\therefore$ el prodcuto infinito converge uniformemente

para cada $\overline{D(0,R)},\ R > 0$

Teorema 3 (Analiticidad de productos infinitos)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ region y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesion de funciones. Si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+f_n(z)\right)$ converge uniformemente en compactos de Ω y ademas f_n es analitica $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

1) $P(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+f_n(z)\right)$ es analitica en Ω

2) $P(z_0) = 0$ para algun $z_0 \in \Omega \;\Leftrightarrow\; f_n(z_0) = -1$ para algun $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo. – $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)$ es entera y se anula unicamente en $z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, con orden 1

Dem. – Por lo anterior vimos que converge uniformemente para cualquier $\overline{D(0,R)}$, $R>0$, por lo que converge para compacto en $\mathbb{C}$. Entonces por el teorema 5, $P(z)$ es analitica y $P(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pm n$

Como $P(z)$ converge uniformemente en $\overline{D(0,R)}$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $f_n(z) \neq -1$

$\Rightarrow\; P(z) = \prod_{n=1}^{N}\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)\prod_{n=N+1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)$ y entonces el orden de cada cero es 1

Tenemos pues que la funcion $g(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ es entera con ceros de orden 1 en $\mathbb{Z}$

e igualmente la funcion $\sin(\pi z)$ es entera con ceros de orden 1 en $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\frac{\sin(\pi z)}{g(z)}$ es escencialmente una funcion entera que no se anula

$\Rightarrow$ $\exists$Una rama del logaritmo, esto es, existe h entera tal que $\frac{\sin(\pi z)}{g(z)} = e^{h(z)}$

$\Rightarrow$ $\sin(\pi z) = e^{h(z)} z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ $\quad$ $e^{h(z)}$ es constante, y ademas $e^{h(z)} = \pi$

$$\therefore \quad \sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

Si tomamos $z \to \frac{z}{\pi}$ obtenemos el resultado de Euler $\frac{\sin(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$

Tenemos pues que

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) \quad \text{y} \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\sin(iz) = -i(iz)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(iz)^2}{\pi^2 n^2}\right) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

y entonces $\dfrac{\sinh(z)}{z} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$ es entera con ceros en $z = \pm\pi i, \pm 2\pi i, ..$

Considererando $z \in D(0,\pi)$ tendremos que $\dfrac{\sinh(z)}{z}$ es entera y no nula, por lo que existe una rama del logaritmo

, i.e, $\mathrm{Log}(\dfrac{\sinh(z)}{z})$ existe y es analitca en $D(0,\pi)$, con ello

$$\mathrm{Log}(\frac{\sinh(z)}{z}) = \mathrm{Log}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad \coth(z) - \frac{1}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z^2+\pi^2 n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{\pi^2 n^2}\frac{1}{(z/\pi n)^2+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{\pi^2 n^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(\frac{z}{\pi n})^{2m-2}$$

$$\Rightarrow \quad \coth(z) - \frac{1}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m}n^{2m}} = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{2z^{2m-1}}{\pi^{2m}}\zeta(2m)$$

$$\therefore \quad \coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{\pi^{2n}}\zeta(2n) \qquad \text{y} \qquad \coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$$

$$\Rightarrow \quad 2(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi^{2n}}\zeta(2n) = \frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \quad \forall n \geq 1}$$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^{2}, \quad \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^{4}, \quad \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^{6}, \ldots, \quad \zeta(12) = \frac{691}{638512875}\pi^{12}$$

Extension analitica de ζ y $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Definición (Extensión analítica)

Sean $f : \Omega_1 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analiticas con $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ regiones. Si g es tal que $f(s) = g(s)\ \forall s \in \Omega_1$ diremos que g extiende analiticamente a f

Definición (Función Gamma)

Definimos a la funcion Gamma de Euler (Γ) como:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} e^{-\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n}$$

donde γ es la constante de Euler

Proposición 3

La funcion Γ esta bien definida y es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$

Dem. –

Basta probar que $1/\Gamma(s) = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$ es entera con ceros de orden 1 en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ ■

Proposición 4

Si $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_{\leq 0}$ entonces

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{s+k}$$

Corolario

Si $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \Gamma(n+1) = n!$

Dem. –

- $\Gamma(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^1}{1} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k} = \lim_{n \to \infty} n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

- $\Gamma(s+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{s+1}}{s+1} n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{s+1+k} = s \lim_{n \to \infty} \frac{n}{s+1+n} \frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{s+k} = s\Gamma(s) \qquad \therefore \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

- $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(1) = n!$

$\blacksquare$

Corolario (Formula de reflexión)

Para cada $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_{\leq 0}$ se tiene que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$

Dem. –

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \Gamma(s)(-s)\Gamma(-s) = -s \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{s}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{s+k}\cdot\frac{n^{-s}}{-s}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{-s+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2-s^2} = \frac{1}{s\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

■

Teorema 4 (Representación Integral de Gamma)

Si $s \in \mathbb{C}_+$ entonces $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$

Definición (Función Omega de Jacobi)

$\forall x > 0$ definimos

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}$$

Teorema 5 (Primera Ecuación Funcional)

Sea $s \in \mathbb{C}_+ + 1$ entonces

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = 1 + s(s-1)\int_1^{\infty}\left(x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}\right)\omega(x)dx$$

Dem. – Sea $s \in \mathbb{C}_+ + 1$, entonces

$$\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} t^{s/2-1}e^{-t}dt \quad \text{Haciendo } t = \pi n^2 x \quad \Rightarrow \quad \Gamma(s/2) = (\pi n^2)^{s/2-1}\pi n^2\int_0^{\infty} x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx = \pi^{s/2}n^s\int_0^{\infty} x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx \quad \Rightarrow \quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx = \int_0^{\infty} x^{s/2-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)dx = \int_0^{1} x^{s/2-1}\omega(x)dx + \int_1^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} x^{-(s+1)/2}\omega(x)dx + \int_1^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)dx \qquad \blacksquare$$

Haciendo $x = \dfrac{1}{y}$

$$\omega(1/x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\,\omega(x)$$

Definición (Función Xi de Riemann)

Sea $s \in \mathbb{C}$, definimos a la funcion Xi como

$$\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_1^{\infty}\left(x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}\right)\omega(x)dx$$

Teorema 6

La funcion ξ esta bien definida y es entera

Obs. – $\forall s \in \mathbb{C},\ \xi(1-s) = \xi(s)$

Teorema 7 (Extensión Analítica de la función Zeta)

La funcion ζ se extiende analiticamente a todo el plano complejo excepto en $s = 1$ y se cumple la ecuacion funcional

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) \quad \forall s \neq 0,1$$

Dem. – Tenemos que para $s \in \mathbb{C}_+ + 1$

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s) \quad \Rightarrow \quad \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{s(s-1)}\frac{1}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

$\therefore \; \dfrac{\pi^{s/2}}{s(s-1)} \dfrac{1}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$ extiende analiticamente a ζ en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$

Por ultimo tenemos que $s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \xi(s) \; = \xi(1-s) = s(s-1)\pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$ $\blacksquare$

- Ya vimos que para $n \geq 1$, $\boxed{\zeta(2n) = \dfrac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}}$

- Ahora por lo anterior tenemos que para $s \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$ se tiene que

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{s(s-1)} \frac{1}{\Gamma(s/2)} \xi(s) \underset{s=-2n}{\Rightarrow} \zeta(-2n) = \frac{\pi^{(-2n)/2}}{-2n(-2n-1)} \frac{1}{\Gamma(-2n/2)} \xi(-2n) \quad \Rightarrow \quad \zeta(-2n) = \frac{\pi^{-n/2}}{-2n(-2n-1)} \frac{1}{\Gamma(-n)} \xi(-2n)$$

pero $\dfrac{1}{\Gamma(-n)} = 0$ $\qquad \boxed{\Rightarrow \quad \zeta(-2n) = 0}$

- Ahora, teniendo la ecuacion funcional

$$\pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \zeta(1-s) \quad \Rightarrow \quad \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1+s}{2}) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \Gamma(\frac{1+s}{2}) \zeta(1-s)$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1+s}{2}) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \frac{\pi}{\sin(\pi \cdot \frac{1+s}{2})} \zeta(1-s) = \pi^{-(1-s)/2} \frac{\pi}{\cos(\pi s/2)} \zeta(1-s)$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{-s/2}\frac{\pi^{1/2}}{2^{s-1}}\Gamma(s)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\frac{\pi}{\cos(\pi s/2)}\zeta(1-s) \qquad \Rightarrow \quad \zeta(1-s) = \frac{\pi^{-s}}{2^{s-1}}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s)$$

$$\underset{s=2n}{\Rightarrow} \quad \zeta(1-2n) = \frac{\pi^{-2n}}{2^{2n-1}}\cos(\pi 2n/2)\Gamma(2n)\zeta(2n) = \frac{\pi^{-2n}}{2^{2n-1}}(-1)^n(2n-1)!\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}$$

$$\boxed{\therefore \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}}$$

- Tenemos que $G(s) = \dfrac{1}{s\Gamma(s/2)} = \dfrac{1}{2}e^{\gamma\frac{s}{2}}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-s/2n} \quad \Rightarrow \quad G(0) = \frac{1}{2}$

Por lo que $\zeta(s) = \dfrac{\pi^{s/2}}{s(s-1)}\dfrac{1}{\Gamma(s/2)}\xi(s) = \dfrac{\pi^{s/2}}{s-1}G(s)\xi(s) \quad \Rightarrow \quad \zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{\zeta(-n) = (-1)^n\frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad n = 0,1,2,\ldots}$$

Obs. –

$\odot$ $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}$

$\odot$ $\zeta(-1) = -\dfrac{1}{12}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$

¿ Que pasa con $\zeta(2n+1), n \geq 1$?

- Euler conjeturo que $\zeta(2n+1) = \dfrac{a}{b}\pi^{2n+1}$, sin embargo no pudo demostrarlo usando su metodo.
- Euler en 1772 encontro una "formula de recurrencia" para $\zeta(3)$

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7}\left(1 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k}(2k+1)(2k+2)}\right)$$

- A lo largo de los años mas personas encontraron otras representaciones para ζ en impares
- En el año 1978, Roger Apéry en apoyo de Henri Cohen, Hendrik Lenstra y Alfred van der Poorten, dio una prueba de que $\zeta(3) \approx 1.20205....$ es un numero irracional hoy conocida como la constante de Apéry

  Su prueba no se pudo extender a otros valores
- En el año 2000, Tanguy Rivoal demostro que hay una infinidad de $n \in \mathbb{N}$ tales que $\zeta(2n+1)$ es irracional
- En el año 2001, V. Zudilin, demostro almenos uno de los cuatro numeros $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ es irracional
- En el año 2002, Cvijovic y Klinowski, demostraron la siguiente representacion integral para los impares

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}\int_0^1 B_{2n+1}(x)\cot(\pi x)dx$$

- Mas aun, se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{\zeta(n)\} = 1$$

y ademas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\zeta(2n)\} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\{\zeta(2n+1)\} = \frac{1}{4}$$

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \qquad \zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}\int_0^1 B_{2n+1}(x)\cot(\pi x)dx$$