Seminario de Becarios 2025-2
Instituto de Matemáticas, UNAM

La Hipótesis de Riemann: Una ventana a la distribución de los números primos Parte 1

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

20/marzo/2025

Instituto de Matemáticas

Ideas de Euler

Instituto de Matemáticas

En 1734 Leonhard Euler soluciono el denominado problema de Basilea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Pietro Mengoli (lo propuso en 1650)

Unos siglos antes (XIV) Nicole Oresme había probado que la serie armónica era divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \to \infty$$

¿ Y si....?

$$¿\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad k \in \mathbb{Z}^+ ?$$

En ese mismo año (1734) Euler dio una generalizacion de su resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}$$

Jacob Bernoulli (1654-1705)

$$\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}=\frac{1}{90}\pi^{4}\\[2ex]\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{6}}=\frac{1}{945}\pi^{6}\end{cases}$$

Sin embargo no tuvo exito con las potencias impares...

3 AÑOS despues...

Euler encontro una relacion entre la serie armonica y un producto infinito

En 1737 dio un argumento de que

$$\text{"}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{"}=\text{"}\left(\frac{1}{1-2^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-3^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-5^{-1}}\right)\cdots=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right)$$

Ideas de Euler

y mas aun...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-x}} \right) \quad \forall x > 1$$

Euler siguio trabajando con esta funcion a la cual denominaremos "Función Zeta" $\zeta(x)$

de la cual nos interesara el siguiente resultado:

$$(1-2^{1-x})\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} - 2^{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^x} = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

$$\therefore \quad \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}, \quad x > 1$$

La extensión de Riemann

Instituto de Matemáticas

Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Leonhard Euler (1707 – 1783)

1846 a los 19 años → Ingreso a la universidad de Gotinga estudiando filologia y teologia

1847 a los 20 años → Se traslado a la universidad de Berlin recomendado por Gauss para estudiar matematicas, sin embargo debido a protestas regreso a Gotinga a los dos años

1854 a los 27 años → Sento las bases para la geometria riemaniana dando su primera conferencia

1859 a los 32 años → Presento su tesis doctoral titulada "Sobre el numero de primos menores a una cantidad dada"

La extensión de Riemann

Riemann se intereso por los trabajos de Euler

¿ Y si....? $x \in \mathbb{C}$?

Si consideramos $s \in \mathbb{C}$ ¿Que podemos decir de la función:

$$\boxed{\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}}$$

¿ Cual es su dominio?

Converge para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

"Sobre el numero de primos menores a una cantidad dada"
1859

Funciones en el Analisis Complejo

- ¿Donde es analitica?
- ¿Cual es el maximo dominio de analiticidad?
- ¿Cuales son y como son sus singularidades?
- ¿Cuales son sus ceros?

$$\boxed{\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1}$$

Instituto de Matemáticas

¿Donde es analitica?

Resulta ser que la funcion ζ es analitica en $\Omega := \left\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1 \right\}$

Se hace uso del criterio M de Weierstrass y la convergencia normal

- $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} < \frac{1}{n^{\rho}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}} < \infty$ pues $\rho > 1$

$\therefore$ el criterio M de Weiestrass la funcion converge absoluta y uniformemente

$\therefore$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω

$\therefore$ es analitica en Ω

más aun, Riemann probo que el producto de Euler aun era valido

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \quad \operatorname{Re} s > 1$$

Continuación Analítica

¿Cual es el maximo dominio de analiticidad?

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ esta definida y es analitica en $D(0,1)$

pero sabemos que para $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

sin embargo $g(z) = \frac{1}{1-z}$ existe y es analitica para todo $z \neq 1$

en este caso decimos que $g(z)$ es una continuación analitica de $f(z)$

¿Como encontramos una continuación analitica para ζ?

Principio de continuación analítica

Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analiticas donde Ω es abierto y conexo.

Si $f(z) = g(z)$ para $\forall z \in \Lambda \subset \Omega$ subconjunto con un punto de acumulación , entonces

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

¿Que fue lo primero hecho por Riemann?

Recordemos que Euler probo: $\zeta(x) = \dfrac{1}{1-2^{1-x}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}, \quad x > 1$

$$\Rightarrow \quad \zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

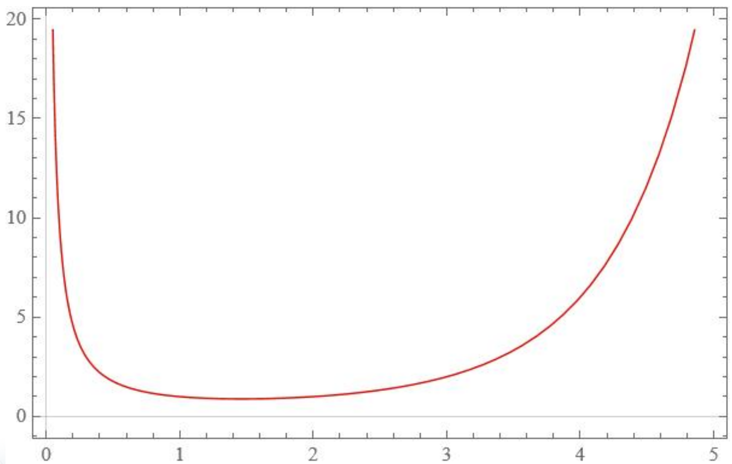
pero $\dfrac{1}{1-2^{1-s}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ existe para $\operatorname{Re} s > 0$

Continuación Analítica

$\therefore \quad \zeta(s) = \dfrac{1}{1-2^{1-s}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ es una continuacion analitica para ζ a $\mathrm{Re}\, s > 0$

sin embargo...

Consideraremos a la Funcion Gamma, un ejemplo clasico de continuacion analitica



$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \;\; x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \;\; n \in \mathbb{N}$$

1729

$$\Rightarrow \;\; \Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \;\; \mathrm{Re}\, s > 0$$

Continuación Analítica

Es facil probar que, para $\mathrm{Re}\, s > 0$:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

de donde

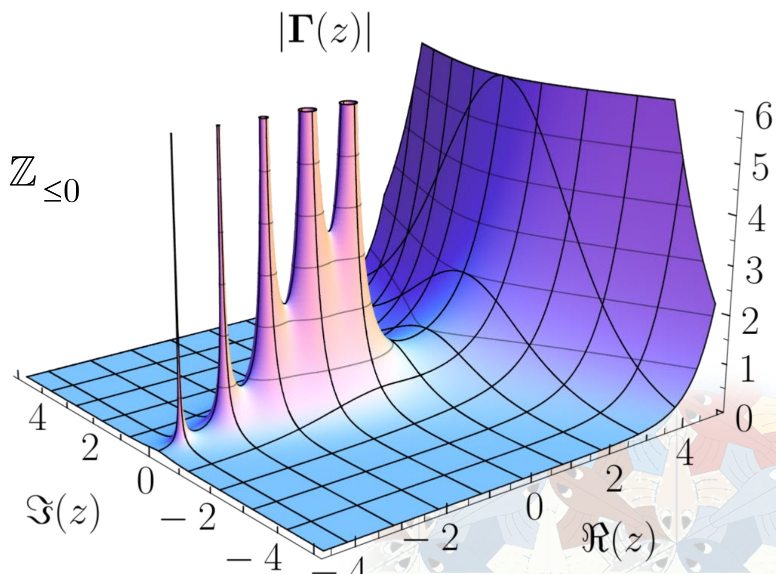
$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

$\Rightarrow$ Γ se continua analiticamente a $\mathrm{Re}\, s > -1$ con un polo simple en $s = 0$

$$\Gamma(s+2) = (s+1)\Gamma(s+1) = (s+1)s\Gamma(s) \Rightarrow \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}$$

$\Rightarrow$ $\cdots$ la funcion Γ se extiende analiticamente a

todo el plano complejo donde tendra polos simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$



¡No se anula!

Continuación Analítica

Rumbo a la ecuacion funcional de la funcion ζ

Sea $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} s > 1$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{s/2-1} e^{-t} dt \qquad \text{haciendo } t = -\pi n^2 x \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty (-\pi n^2 x)^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} \pi n^2 dx \quad \Rightarrow \pi^{-s/2} \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} dx$$

$$\underset{\text{sumando}}{\Rightarrow} \quad \pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} dx \qquad \text{(por convergencia dominada)}$$

$$= \int_0^\infty x^{s/2-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}}_{\omega(x)} dx$$

$$= \int_0^\infty x^{s/2-1} \omega(x) dx$$

Continuación Analítica

Instituto de Matemáticas

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^\infty x^{s/2-1}w(x)dx$$

para la integral

$$\int_0^\infty x^{s/2-1}w(x)dx=\int_0^1 x^{s/2-1}\omega(x)dx+\int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx$$

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty x^{-s/2-1}\omega(x)dx+\int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx$$

$$\Rightarrow\ \pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \omega(x)\left[x^{s/2-1}+x^{-s/2-1}\right]dx$$

$$\underset{*\,s(s-1)}{\Rightarrow}\ s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=1+s(s-1)\int_1^\infty \omega(x)\left[x^{s/2-1}+x^{-s/2-1}\right]dx$$

Continuación Analítica

Funcion Xi de Riemann ξ

$$\xi(s) := 1 + s(s-1)\int_1^{\infty} \omega(x)\left[x^{s/2-1} + x^{-s/2-1}\right]dx$$

⊙ Esta bien definida $\forall s \in \mathbb{C}$

⊙ La funcion ξ es entera

de donde $\quad s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \xi(s) \quad \Rightarrow \zeta(s) = \xi(s)\frac{1}{\Gamma(s/2)}\frac{1}{s(s-1)}\pi^{s/2}, \quad \operatorname{Re} s > 1$

¿Donde esta definida la parte derecha?

Las unicas "singularidades" posibles son $s = 0$ y $s = 1$

pero $s = 0$ es removible pues $\lim\limits_{s\to 0}\frac{1}{\Gamma(s/2)}\frac{1}{s}$ existe

Continuación Analítica

Definición

Se define a la función zeta de Riemann como la extension analitica:

$$\zeta(s) = \xi(s)\frac{1}{\Gamma(s/2)}\frac{1}{s(s-1)}\pi^{s/2} \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

de la funcion Zeta. Siendo analitica en todo el plano complejo excepto en $s = 1$.

¿Y la ecuacion funcional?

Es facil comprobar que la funcion ξ cumple $\xi(s) = \xi(1-s)$

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s) = \xi(1-s) = s(s-1)\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s)$$

Ecuación Funcional de ζ

$$\boxed{\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s), \quad s \neq 0,1}$$

Continuación Analítica

despejando ζ de esta expresion:

$$\Rightarrow \quad \zeta(s) = \pi^{(-1+2s)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

Formula de Reflexion de Euler

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s), \qquad s \neq 0,1$$

Único polo y ceros

¿Cuales son sus singularidades y ceros?

De su continuacion analitica es evidente que solo tiene una singularidad en $s = 1$

$$\zeta(s) = \xi(s)\frac{1}{\Gamma(s/2)}\frac{1}{s(s-1)}\pi^{s/2}$$

ademas es un polo simple, esto se puede probar utlizando

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad \text{para } \operatorname{Re} s > 0$$

por lo que no hay mas que discutir

Único polo y ceros

de la ecuacion funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

los unicos ceros que podemos obtener de aqui son los pares negativos

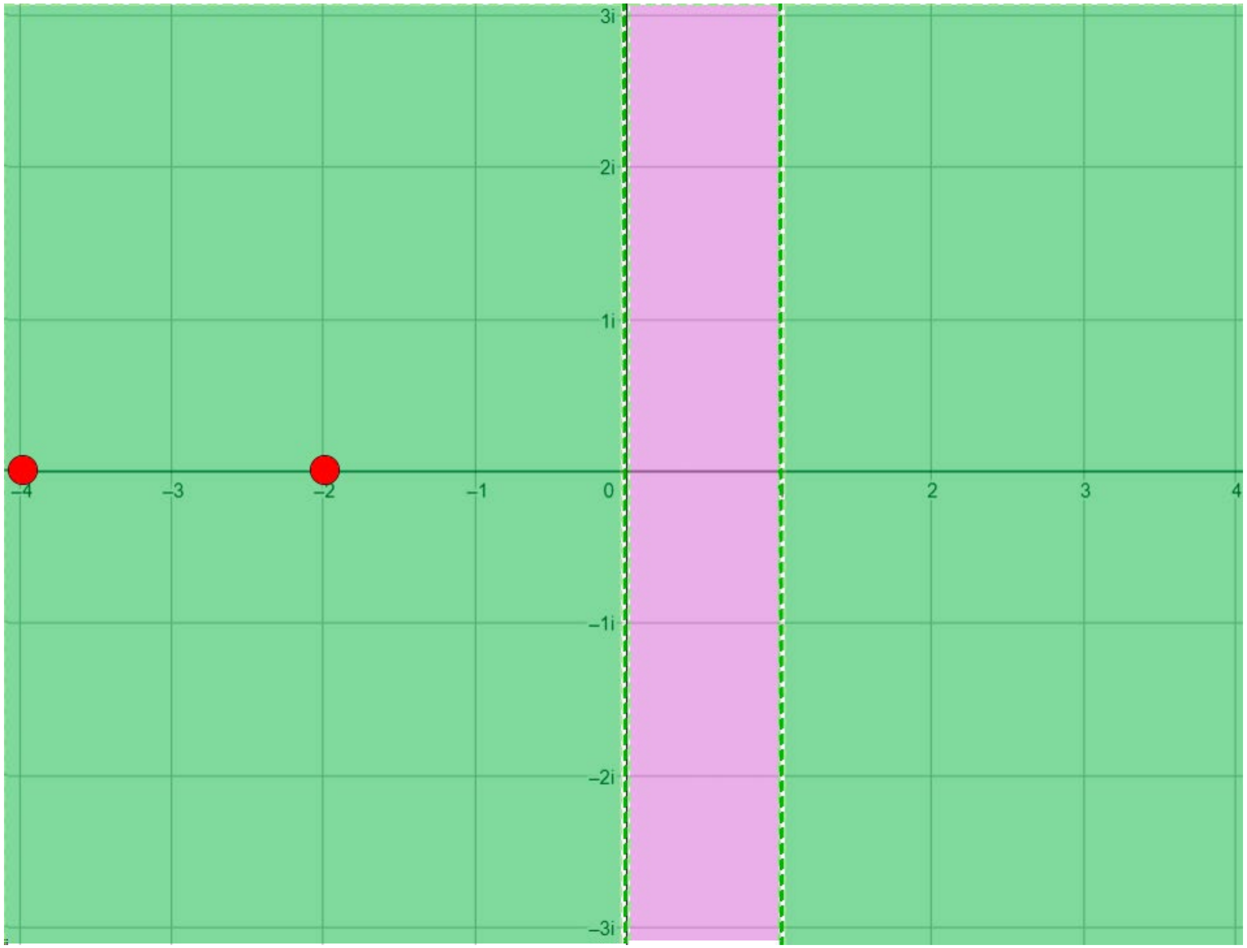
Ceros triviales de la funcion ζ : $\quad -2n, \quad n \in \mathbb{N}$

¿Hay más?

En principio es dificil de responder, por ello les denominaremos Ceros No Triviales de la funcion ζ

haremos un analisis de las regiones libres de ceros

Los ceros no triviales



La franja crítica de la función ζ

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\quad \mathrm{Re}\, s>1$$

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Los ceros no triviales

La franja critica de la función ζ $\quad \{z \in \mathbb{C} : \; 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$

De la continuacion analitica:

$$\zeta(s) = \xi(s)\frac{1}{\Gamma(s/2)}\frac{1}{s(s-1)}\pi^{s/2} = \underbrace{\xi(s)}_{\text{ceros no triviales}} \; \underbrace{\frac{\pi^{s/2}}{s-1}}_{\text{polo en } s=1} \; \underbrace{\frac{1}{s\Gamma(s/2)}}_{\text{ceros triviales}}$$

$$\zeta(s) = 0 \iff \xi(s) = 0$$

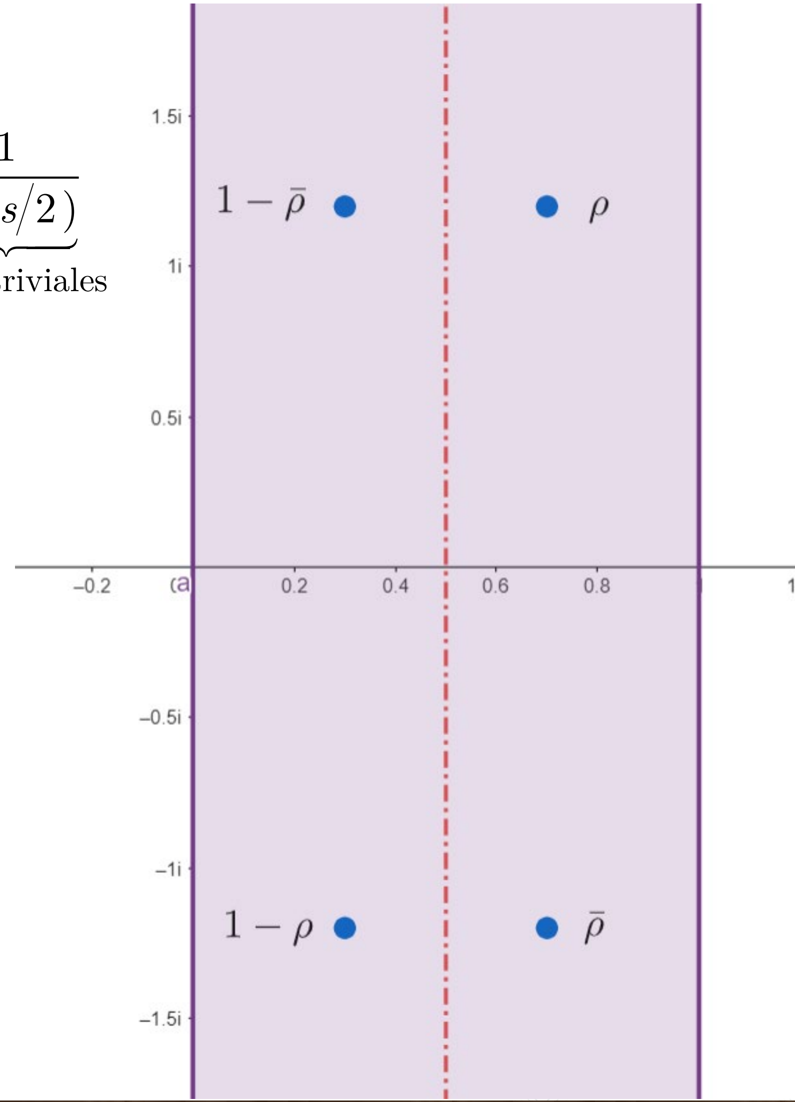
ademas cumple:

- $\xi(s) = \xi(1-s)$
- $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$

Si ρ es cero no trivial $\Rightarrow$ $1-\rho$ tambien

Si ρ es cero no trivial $\Rightarrow$ $\overline{\rho}$ tambien

Si ρ es cero no trivial $\Rightarrow$ $1-\overline{\rho}$ tambien



La hipótesis de Riemann

"Los ceros No Triviales de la función ζ viven en la recta con $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$"

pero hay un problema...

¿Existen ceros no triviales si acaso?

La hipótesis de Riemann

Pero si hay algo que hizo

Para $T > 0$ definamos

$$N(T) = \#\left\{\text{ceros no triviales } \rho \text{ en el rectangulo } 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ y } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq T\right\}$$

entonces de manera informal estimo que

$$N(T) \approx \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}$$

pero no lo probo como tal

Fue hasta 1895 que Hans von Mangold probo de manera rigurosa la afirmacion de Riemann

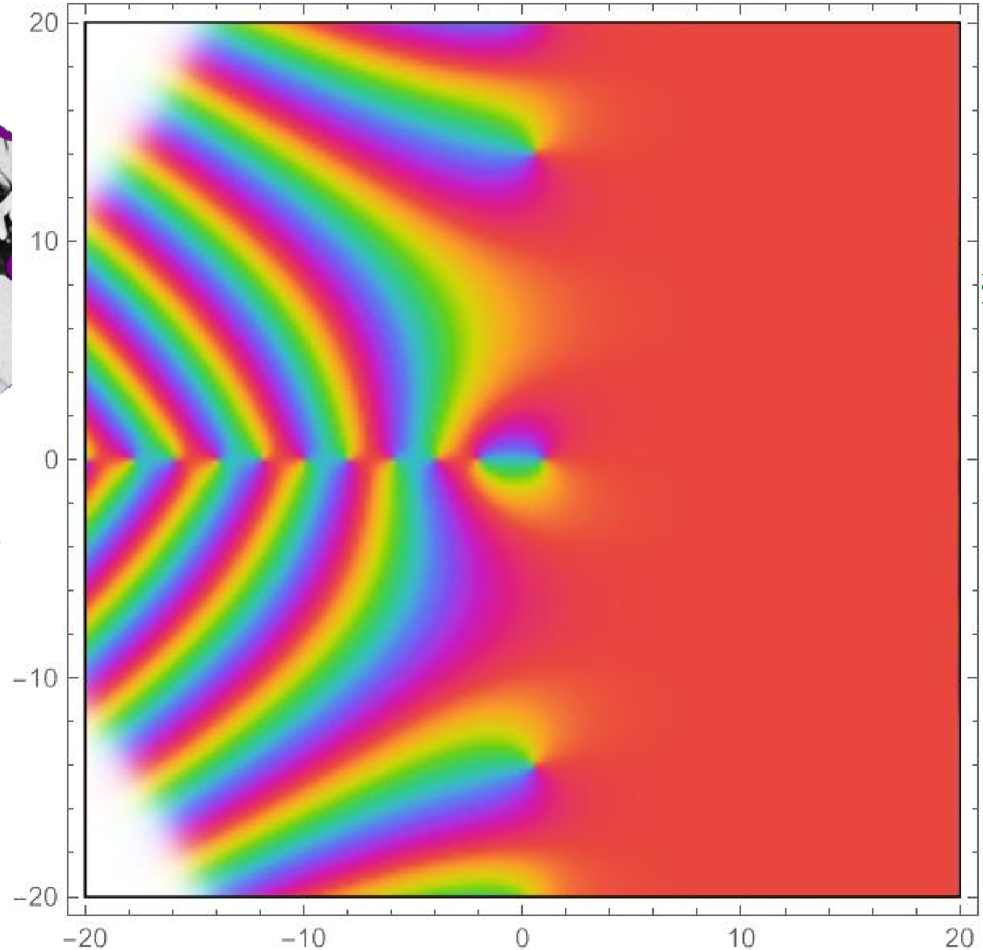
$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

y dado que $N(T) \to \infty$ cuando $T \to \infty$ ¡Hay infinitos ceros en la banda critica!

$$\rho \approx \frac{1}{2} + i(14.1347251417)$$

La hipótesis de Riemann

Pero G.H. Hardy fue mas allá



Siegel"

Hardy demostro que

La hipótesis de Riemann

Instituto de Matemáticas

Si consideramos unicamente $\zeta(s) = \zeta(\frac{1}{2} + it)$

¿Y donde entran los primos en todo esto?




en 2019...

Demostrar la hipótesis de Riemann
Primer semestre
Entender de qué va la hipótesis de Rieman y luego demostrarla
Segundo semestre
Entender alguna hipótesis y luego demostrarla
Último semestre siendo tesista
Entender la hipótesis que me plantea mi asesor
Maestría
formular alguna hipótesis
Doctorado

Instituto de Matemáticas

¿Donde es analitica?

Resulta ser que la funcion ζ es analitica en $\Omega := \left\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\right\}$

Hacemos uso del criterio M de Weierstrass y la convergencia normal

Sea $K \subset \Omega$ compacto probaremos que la funcion zeta converge absoluta y uniformemente en K

La función $g(z) = \operatorname{Re} s$ es continua en $K \Rightarrow$ alcanza su minimo, digamos $s_0 \in K$ con $g(s_0) := \rho > 1$

ahora sea $s \in K$

- $\left|\dfrac{1}{n^s}\right| = \dfrac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} < \dfrac{1}{n^\rho}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho} < \infty$ pues $\rho > 1$

$\therefore$ el criterio M de Weiestrass la funcion converge absoluta y uniformemente en K

$\therefore$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω

$\therefore$ es analitica en Ω